Temas selectos de matemáticas I

Faustino Vizcarra Parra | Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa | Paloma Sandoval Gámez

Temas selectos de matemáticas I

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Paloma Sandoval Gámez

Primera edición, noviembre de 2025

Universidad Autónoma de Sinaloa
Dirección General de Escuelas Preparatorias
Ciudad Universitaria, Circuito Interior Ote. S/N, C.P. 80013
Teléfono: 667 712 1653, Culiacán, Sinaloa, México

Luis González Obregón S/N, C.P. 80135, Nuevo Bachigualato,
Teléfono: 667 712 2950, Culiacán, Sinaloa, México

Diseño editorial: Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.
Diseño de portada: Irán Ubaldo Sepúlveda León
Fotografía de la portada: Realizada con IA-2025

Número de Registro: 03-2025-091810355300-01
ISBN: 978-607-9432-78-2

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes.

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del álgebra y de las funciones ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestra más sincera gratitud. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Nombre	UAP
Policarpio Sicarios Avitia	Hermanos Flores Magón
César Pilar Quintero Campos	La Cruz
Martín Luna Belmar	
Efraín Meza Valdez	
Silvestre Trinidad Quintero Ibarra	
Felipe de Jesús Sicarios Avitia	Navolato
Eva Edith Verdugo Serrano	Ruiz Cortines
Aline Guadalupe Núñez Solís	San Blas, ext. Las Higueras de los Natochis
Adán Meza Sánchez	Comte. Víctor Manuel Tirado López
Nereyda de Jesús Díaz Gustavo	8 de julio, Ext. Dr. Gabino Barreda
Armando Arellano Rodríguez	8 de julio
Alma Guadalupe Astorga Reyes	Vladimir Ilich Lenin
Izaid Santos Páez	
Said Ulianov Verdugo Castro	
Haidé Aracely Gastélum Pacheco	Choix

Eduardo Ayala Alejo	El Fuerte
Oscar Mauricio Heredia Ruiz	CU Mochis
Horacio Gabriel López Ramírez	
José Humberto Romero Fitch	
Heriberto Carlos Ayala Cruz	
Karla Vanessa Ayala Cruz	
Pedro Alberto Alarcón Morales	Los Mochis
Naysin Yunibbe Bañuelos Millán	
Misael Romero Lozoya	
Yadira Esmeralda Gutiérrez Esquivel	
Edith Ivett Ocampo Manjarrez	
Abril Liseth Fierro Romero	
Paola Elifelet Reyes Álvarez	
Dulce Karina Sánchez Romero	Venancio Leyva Murillo, Extensión Mezquite Alto
Gema Espinoza Sepúlveda	Guasave Diurna
Luis Felipe Flores Tirado	Dr. Salvador Allende
Flavio Ixtoc Manjarrez Vega	Emiliano Zapata
Cynthia Gpe. Manjarrez Vega	
Juana María Armenta Trasviña	Guasave Diurna
Joel Acosta Orozco	
Claudia Edith Carrillo Castillo	
Juan Carlos Pazos Robles	
Iliana Tirado Olivas	Rubén Jaramillo
Asia Cecilia Carrasco Valenzuela	
Sandra Araceli Arreola Mora	Heraclio Bernal
Anarelli Corona Cárdenas	Victoria del Pueblo
Fernando Tomás Gil Camacho	
Izeth Sarai Rivera Diaz	Los Mochis Extensión Macapule
Zayto Baltazar Peñules Borboa	
Celina Soto Rocha	Carlos Marx
Fernando Eleazar Acosta Cruz	DGEP
Jesús Isela Morales Higuera	Central Diurna
Ramón Chávez Valenzuela	
Karely Mendoza López	Juan José Ríos
Siguifredo Cortez Mondaca	

Tabla de categorías,
subcategorías, aprendizajes de trayectoria
y metas de aprendizaje
de Temas Selectos de Matemáticas I

Categorías			
C1 Procedural	**C2** Procesos de intuición y razonamiento	**C3** Solución de problemas y modelación	**C4** Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	**S1** Capacidad para observar y conjeturar	**S1** Uso de modelos	**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S3 Elementos variacionales	**S2** Pensamiento intuitivo	**S2** Construcción de modelos	**S2** Negociación de significados
	S3 Pensamiento formal	**S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	**S3** Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**M1-C2** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**M1-C3** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**M1-C4** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**M2-C2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**M2-C3** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**M2-C4** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**M3-C2** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**M3-C3** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**M3-C4** Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**M4-C3** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Temas Selectos de Matemáticas I, que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Temas Selectos de Matemáticas I del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al cuarto semestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:

> un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para continuar desarrollando el pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento algebraico.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Temas Selectos de Matemáticas I desarrollan el álgebra y las funciones para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. Potencias y radicales.
- PA 2. Productos notables.
- PA 3. Factorización de polinomios.
- PA 4. Fracciones algebraicas.
- PA 5. Inecuaciones lineales de una variable.
- PA 6. Inecuaciones cuadráticas.
- PA 7. Funciones.
- PA 8. Funciones lineales.
- PA 9. Funciones cuadráticas.
- PA 10. Función potencia.
- PA 11. Funciones polinomiales.
- PA 12. Funciones racionales.
- PA 13. Operaciones con funciones.
- PA 14. Funciones inversas.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y la evaluación formativa diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa para el aprendizaje autorregulado, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación, la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño de cada estudiante.

Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: https://parzibyte.me/apps/generador-qr/), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje. En cuanto a las representaciones gráficas que se incluyen, estas fueron hechas en Desmos y GeoGebra, así como las figuras en Word.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Contenido

Potencias y radicales

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}\text{, donde } \begin{cases} \text{si } n \text{ es par, } a \geq 0. \\ \text{si } n \text{ es impar, } a \in \Re. \\ \text{si } a = 0,\ m \geq 1. \end{cases}$$

Progresión de aprendizaje 1

Genera un algoritmo para simplificar y racionalizar expresiones complejas que involucren potencias de exponente fraccionario y radicales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
MI-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
MI-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
MI-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
MI-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 1.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el valor de 2^3?

   a) 6 b) 1/8 c) 8

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa correctamente 3^{-1}?

   a) –3 b) 1/9 c) 1/3

3. ¿Cuál es el resultado de $(-5)^3$?

   a) –125 b) 125 c) –15

4. ¿Cuál es el valor de $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$?

   a) 1/4 b) 2 c) –1/2

5. ¿Cuál es el resultado de 5^0?

   a) 0 b) 1 c) 5

6. ¿Cuál es el valor de 0^0?

a) 0 b) 1 c) No está definido

7. ¿Cuál de los siguientes valores representa correctamente $\sqrt{9}$?

a) -3 b) 3 c) $\sqrt{3}$

8. ¿Cuál de los siguientes valores corresponde a $\sqrt[3]{-8}$?

a) 2 b) -4 c) -2

Potencias con exponente entero

Desde la aritmética se define la potencia de exponente entero como una multiplicación repetida cuyo resultado le llamamos potencia. Para indicar una multiplicación o producto, puedes expresarla como:

$$ab \qquad a \cdot b \qquad (a)(b) \qquad a(b) \qquad (a)b$$

Potencia en aritmética		Potencia en álgebra
$3^1 = 3$		$x^1 = x$
$3^2 = (3)(3)$	sustituyendo 3 por x,	$x^2 = x \cdot x$
$3^3 = (3)(3)(3)$	se transforma en	$x^3 = x \cdot x \cdot x$
$3^4 = (3)(3)(3)(3)$		$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

En álgebra, al igual que en aritmética, una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación en la que se repite un mismo factor un cierto número de veces, con la diferencia de que en álgebra usamos variables para representarlas. Para ver un ejemplo de una potencia escanea el código QR 1.1.

QR 1.1. ¿Qué es la potencia de un número? Video de PruébaT. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Potencia de exponente entero

Si x es un número real y n un número natural, entonces el símbolo x^n representa el producto de n factores de x, es decir,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ factores de } x}$$

Donde x^n es la potencia, x es la base y n es el exponente. El caso 0^0 no está definido.

En aritmética, tienes que $(-4)^3 = -4^3$ y que $(-4)^2 = 4^2$. A continuación, explora el comportamiento de $(-x)^n$ para n impar y luego para n par.

Para exponente impar	Para exponente par
$(-x)^1 = -x$	$(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$
$(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$	$(-x)^4 = (-x)(-x)(-x)(-x) = x^4$

De lo anterior, tienes que $(-x)^n = \begin{cases} x^n, \text{ si } n \text{ es par} \\ -x^n, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Observa que en $(-x)^n$ la base es $-x$ y que en $-x^n$ la base es x.

Para las potencias con exponente entero son válidas las siguientes reglas o leyes de los exponentes.

Leyes de los exponentes

Si x y y son números reales, m y n números enteros, entonces:

1) $x^0 = 1,\ x \neq 0$	Exponente cero
2) $x^1 = x$	Exponente uno
3) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	Producto de potencias
4) $(x^m)^n = x^{mn}$	Potencia de una potencia
5) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	Potencia de un producto
6) $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m},\ x \neq 0$	Exponente negativo
7) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n},\ x \neq 0$	Cociente de potencias
8) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m},\ y \neq 0$	Potencia de un cociente

Previo al Ejemplo formativo 1.1, profundiza en las propiedades de las potencias escaneando el código QR 1.2.

QR 1.2. Propiedades de las potencias. Video IngE Darwin. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 1.1

1. Simplifica las siguientes expresiones aplicando las leyes de los exponentes.

a) $(5x)^0$ b) $-2z(x^2 + 2y^3)^0$ c) $a^5 \cdot a$ d) $(-3m^2n^4)(2m^5)$

e) $x^3(x^5)^2$ f) $(5a^6)^3$ g) $2m^{-4}$ h) $(2x^{-3}y2)^{-3}$

i) $\dfrac{6x^6}{2x}$ j) $\dfrac{5m^7n^2}{-15m^3n^5}$ k) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^3$ l) $\left(\dfrac{x}{3y^2}\right)^{-3}$

Resolución

a) $(5x)^0 = 1$

b) $-2z(x^2 + 2y^3)^0 = -2z(1) = -2z$

c) $a^5 \cdot a = a^{5+1} = a^6$

d) $(-3m^2n^4)(2m^5) = -6m^{2+5}n^4 = -6m^7n^4$

e) $x^3(x^5)^2 = x^3(x^{5\cdot 2}) = x^{3+10} = x^{13}$

f) $(5a^6)^3 = (5^1)^3\,(a^6)^3 = 5^3a^{18} = 125a^{18}$

g) $2m^{-4} = \dfrac{2}{m^4}$

h) $(2x^{-3}y^2)^{-3} = \dfrac{1}{(2x^{-3}y^2)^3} = \dfrac{1}{8x^{-9}y^6} = \dfrac{x^9}{8y^6}$

i) $\dfrac{6x^6}{2x} = \dfrac{6}{2} \cdot \dfrac{x^6}{x} = 3x^{6-1} = 3x^5$

j) $\dfrac{5m^7n^2}{-15m^3n^5} = \dfrac{5}{-15} \cdot \dfrac{m^7n^2}{m^3n^5} = -\dfrac{1}{3}m^4n^{-3} = -\dfrac{m^4}{3n^3}$

k) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^3 = \dfrac{x^3}{(y^2)^3} = \dfrac{x^3}{y^6}$

l) $\left(\dfrac{x}{3y^2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3y^2}{x}\right)^3 = \dfrac{(3y^2)^3}{x^3} = \dfrac{3^3(y^2)^3}{x^3} = \dfrac{27y^6}{x^3}$

Actividad formativa 1.1

1. Aplica las leyes de los exponentes y simplifica a su mínima expresión.

a) $-2(n-1)^0 + 2 =$

b) $-(-4xy)(-4xy) =$

c) $(-3)^3\,(ab)^5\,(a^3)^2 =$

d) $(4abc)^2\,(3bc)^3 =$

e) $\dfrac{-7x^5y^5z^{10}}{-x^5z^6} =$

f) $\dfrac{(4a^2b^3c^{-1})^{-2}}{(2a^3b^{-2}c^{-1})^{-3}} =$

g) $-3^3(ab)^{-1}(ba^3)^2 =$

h) $\left(\dfrac{8m^3n^{-1}}{2mn^2}\right)^{-3} =$

Potencias de exponente fraccionario

Ya definimos potencia de exponente entero, ahora vamos a extenderla a exponentes fraccionarios. Las reglas para exponentes enteros también son válidas para exponentes fraccionarios, siempre que la potencia con exponente fraccionario esté bien definida. Por ejemplo:

a) $2^{2/5} \cdot 2^{1/5} = 2^{2/5+1/5} = 2^{3/5}$

b) $(4^{2/3})^{1/2} = 4^{2/3 \times 1/2} = 4^{2/6} = 4^{1/3}$

c) $(2 \times 3)^{3/4} = 2^{3/4} \times 3^{3/4}$

d) $6^{-3/5} = \dfrac{1}{6^{3/5}} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3/5}$

e) $\dfrac{5^{3/5}}{5^{2/5}} = 5^{3/5-2/5} = 5^{1/5}$

f) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{2/3} = \dfrac{5^{2/3}}{7^{2/3}}$

Ejemplo formativo 1.2

1. Simplifica las siguientes expresiones aplicando las leyes de los exponentes para exponentes fraccionarios. Supón que $x > 0$ y $y > 0$.

a) $x^{1/5} \cdot x^{2/5}$

b) $\dfrac{y^{5/3}}{y^{2/3}}$

c) $(z^{2/3})^{3/4}$

d) $(xy)^{3/4}$

e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2/3}$

f) $\left(\dfrac{1}{x^{-\frac{2}{3}}}\right)^{1/2}$

Resolución

a) $x^{1/5} \cdot x^{2/5} = x^{1/5+2/5} = x^{3/5}$

b) $\dfrac{y^{5/3}}{y^{2/3}} = y^{5/3-2/3} = y^{3/3} = y$

c) $(z^{2/3})^{3/4} = z^{2/3 \cdot 3/4} = z^{2/4} = z^{1/2}$

d) $(x \cdot y)^{3/4} = x^{3/4} \cdot y^{3/4}$

e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2/3} = \dfrac{x^{2/3}}{y^{2/3}}$

f) $\left(\dfrac{1}{x^{-2/3}}\right)^{1/2} = (x^{2/3})^{1/2} = x^{2/3 \cdot 1/2} = x^{1/3}$

Actividad formativa 1.2

1. Simplifica las siguientes expresiones aplicando las leyes de los exponentes. Supón que $x > 0, y > 0, z > 0, u > 0, v > 0$ y $w > 0$.

a) $\left(\dfrac{x^{3/2}}{x^{1/2}}\right)^2$

b) $(x^{1/2} \cdot y^{3/2})^{4/3}$

c) $(x^{-1/2} \cdot y^{1/2})^3$

d) $\left(\dfrac{9x^9}{y^3}\right)^{2/3}$

e) $y^{1/4} \cdot y^{-3/2} \cdot y^{-5/8}$

f) $(x^{4/3})^{-1/2}$

g) $\left(\dfrac{x^{-3/4}}{x^{3/2}}\right)^{-1/9}$

h) $\dfrac{10x^{1/3}y^{-1/4}}{15x^{-1/2}y^{3/4}}$

i) $\left(\dfrac{x^{7/2}y^{4/3}z^{-9}}{x^0y^{-1}z^{-2}}\right)^{-1/7}$

j) $\left(\dfrac{u^{-2/3}v^{-4/3}w^{-4}}{u^{-1/3}v^{2/3}w^{-7/3}}\right)^{-3}$

k) $\left(\dfrac{16x^{-4}}{81y^8}\right)^{3/4}\left(\dfrac{8y^{-6}}{27x^9}\right)^{-2/3}$

l) $\left(\dfrac{25x^8}{16y^{-4}}\right)^{-3/2}\left(\dfrac{125y^6}{64x^{-9}}\right)^{2/3}$

Raíces

Has estudiado las potencias de exponente entero mediante la expresión

$$(\text{base})^{\text{exponente}} = \text{valor de la potencia.}$$

Por ejemplo $6^2 = 36$, $(-6)^2 = 36$, $4^3 = 64$ y $(-4)^3 = -64$.

Ahora considera el problema inverso, si conoces el valor de la potencia de un número real que fue elevado a un exponente natural conocido, ¿cuál es la base? A los números que satisfacen esta condición se les llama raíces.

Por ejemplo, 6 y –6 son raíces cuadradas de 36, ya que $36 = 6^2$ y también $36 = (-6)^2$. El número 36 tiene dos raíces cuadradas, 6 y – 6, ¿cuál elegimos al calcular $\sqrt{36}$? Para evitar ambigüedades elige la raíz positiva 6, la cual se le llama raíz principal y se representa mediante el símbolo $\sqrt{\ }$ que se llama radical. En este sentido, $\sqrt{36} = 6$ es la raíz cuadrada principal. Si necesitas la raíz negativa, exprésala como $-\sqrt{36} = -6$. Una forma de representar ambas raíces es $\pm\sqrt{36} = \pm 6$.

De lo anterior, al calcular raíces de índice par (raíz cuadrada, cuarta, sexta, ...) de un número real positivo, debes elegir la raíz positiva (raíz principal).

Cabe aclarar que, la raíz de índice par de un número real negativo no existe en el conjunto de los números reales. Por ejemplo, el número –36 no tiene raíz cuadrada, ya que no hay ningún número real que satisfaga la condición $-36 = (\text{base})^2$. Es decir $\sqrt{-36}$ no es un número real.

En el caso de las raíces cúbicas son posibles tanto números positivos como negativos.

Por ejemplo, 4 es la raíz cúbica de 64, ya que $64 = 4^3$ y se representa como $\sqrt[3]{64} = 4$. De igual forma, –4 es la raíz cúbica de –64, ya que $-64 = (-4)^3$ y se representa como $\sqrt[3]{-64} = -4$.

En consecuencia, las raíces de índice impar (raíz cúbica, raíz quinta, raíz séptima, …) de un número real, tienen una única raíz real con el mismo signo que el radicando

Raíz n-ésima de un número real

- Si n es un natural par y a y b son números reales positivos tales que $a = b^n$, entonces se escribe $\sqrt[n]{a} = b$ y $-\sqrt[n]{a} = -b$.
- Si n es un natural impar y a y b son números reales tales que $a = b^n$, entonces se escribe $\sqrt[n]{a} = b$.

En cualquiera de los dos casos, $\sqrt[n]{0} = 0$. Además, $\sqrt[n]{a}$ se llama raíz n-ésima de a, donde a es el radicando, $\sqrt{\ }$ es el signo radical y n es el índice del radical.

De lo anterior, se ve claro que existe una diferencia entre las raíces de índice par y las raíces de índice impar. Las raíces de índice par están definidas solo para los números reales positivos y el cero. Las raíces de índice impar están definidas para cualquier número real.

Retomando las potencias con exponente racional $a^{m/n}$, estas se relacionan con la raíz n-ésima.

Definición de $a^{m/n}$

Si m es un número entero y n un número natural que no tienen factores comunes (m/n esté reducido a su mínima expresión) y a es un número real, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ donde } \begin{cases} \text{si } n \text{ es par, } a \geq 0. \\ \text{si } n \text{ es impar, } a \in \Re. \\ \text{si } a = 0,\ m \geq 1. \end{cases}$$

Para profundizar sobre las potencias con exponente fraccionario, escanea el código QR 1.3.

QR 1.3. Potencia con exponente fraccionario. Video profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025

Ejemplo formativo 1.3

1. Escribe las siguientes potencias con exponente fraccionario en su forma radical.

a) $5^{1/2}$ b) $7^{2/3}$ c) $(-4)^{1/3}$ d) $-2^{4/5}$
e) $x^{1/2}, x \geq 0$ f) $-y^{3/2}, y \geq 0$ g) $11b^{1/3}$ h) $(3xy)^{4/5}$
i) $x^{3/6}$

Resolución

a) $5^{1/2} = \sqrt{5}$ b) $7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$ c) $(-4)^{1/3} = \sqrt[3]{-4}$
d) $-2^{4/5} = -\sqrt[5]{2^4}$ e) $x^{1/2} = \sqrt{x}, x \geq 0$ f) $-y^{3/2} = -\sqrt{y^3}, y \geq 0$
g) $11b^{1/3} = 11\sqrt[3]{b}$ h) $(3xy)^{4/5} = \sqrt[5]{(3xy)^4}$ i) $x^{3/6} = x^{1/2} = \sqrt{x}$

2. Escribe los siguientes radicales como potencias con exponente fraccionario.

a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{6^3}$ c) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\sqrt[5]{(-2)^4}$
e) $\sqrt{c}, c \geq 0$ f) $\sqrt{(5y)^3}, y \geq 0$ g) $4\sqrt[3]{b^5}$ h) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4}, y \neq 0$

Resolución

a) $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ b) $-\sqrt{6^3} = 6^{3/2}$ c) $\sqrt[3]{7^2} = 7^{2/3}$
d) $\sqrt[5]{(-2)^4} = (-2)^{4/5}$ e) $\sqrt{c} = c^{1/2}, c \geq 0$ f) $\sqrt{(5y)^3} = (5y)^{3/2}, y \geq 0$
g) $4\sqrt[3]{b^5} = 4b^{5/3}$ h) $\sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^4} = \left(\frac{x}{y}\right)^{4/5}, y \neq 0$

Actividad formativa 1.3

1. Escribe las siguientes potencias con exponente fraccionario en su forma radical. Las variables son tales que las potencias indicadas estén bien definidas.

a) $3^{1/2}$ b) $-5^{3/2}$ c) $(6)^{1/3}$ d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{3/5}$
e) $7^{-1/2}$ f) $(17a^3)^{1/2}$ g) $15b^{1/4}$ h) $(-13x^2y)^{3/5}$
i) $(x + 2y)^{1/2}$ j) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}$ k) $\left(\frac{3a^2}{y}\right)^{-2/3}$ l) $(xy)^{2/8}$

2. Escribe los siguientes radicales como potencias con exponente fraccionario. Las variables son tales que las raíces indicadas existan.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[5]{-4}$ c) $\sqrt{x^3}$ d) $-\sqrt[3]{0.5y}$
e) $\sqrt{4b^5}$ f) $\sqrt[4]{6xy^3}$ g) $\sqrt[7]{(-a^2b)^3}$ h) $\sqrt{\left(\frac{(2y)^4}{(11z)^3}\right)}$

Radicales

Los radicales son expresiones matemáticas que involucran raíces. Estos, al igual que las potencias, tienen propiedades que permiten simplificar y operar con estas expresiones de manera eficiente.

Propiedades de los radicales

Si a y b son números reales, variables o expresiones algebraicas, tales que las raíces indicadas existan, con k, m y n números naturales, entonces:

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ Producto de radicales

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ Cociente de radicales

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ Potencia de un radical

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ Potencia de un radical

5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ Radicación de un radical

6) $\sqrt[kn]{a^{km}} = a$ Reducción del índice

7) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ si } n \text{ es impar} \\ |a| \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$, en particular $\sqrt{a^2} = |a|$ Raíz de una potencia

8) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$ Producto de radicales

Para ver ejemplos de las leyes de los radicales escanea el código QR 1.4.

De aquí en adelante, supón que todas las variables están restringidas de tal forma que las variables dentro de los radicales son positivas.

QR 1.4. Leyes de los radicales. Video MateFacil. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 1.4

1. Simplifica las siguientes expresiones aplicando las leyes de los radicales.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{7}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y}}$

e) $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^2$ f) $\left(\sqrt[4]{6x}\right)^3$ g) $\sqrt[3]{\sqrt{13}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{z^2}}$

i) $\sqrt[6]{7^4}$ j) $\sqrt[15]{x^6}$ k) $\left(\sqrt{15}\right)^2$ l) $\left(\sqrt[3]{-5x}\right)^3$

m) $\sqrt{3^2}$ n) $\sqrt{(-3)^2}$ ñ) $\sqrt[3]{(-5x)^3}$ o) $\sqrt[3]{(5x)^3}$

Resolución

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$

b) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y}} = \sqrt[4]{\dfrac{2x}{3y}}$

e) $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^2 = \sqrt[3]{(-5)^2} = \sqrt[3]{25}$

f) $\left(\sqrt[4]{6x}\right)^3 = \sqrt[4]{(6x)^3} = \sqrt[4]{216x^3}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt{13}} = \sqrt[3 \cdot 2]{13} = \sqrt[6]{13}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{z^2}} = \sqrt[3 \cdot 3]{z^2} = \sqrt[9]{z^2}$

i) $\sqrt[6]{7^4} = \sqrt[2 \cdot 3]{7^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$

j) $\sqrt[15]{x^6} = \sqrt[3 \cdot 5]{x^{3 \cdot 2}} = \sqrt[5]{x^2}$

k) $\left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$

l) $\left(\sqrt[3]{-5x}\right)^3 = -5x$

m) $\sqrt{3^2} = |3| = 3$

n) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

ñ) $\sqrt[3]{(-5x)^3} = -5x$

o) $\sqrt[3]{(5x)^3} = 5x$

Actividad formativa 1.4

1. Simplifica las siguientes expresiones aplicando las leyes de los radicales.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$	b) $\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt[3]{5}$	c) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{2y^3}$	d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{-9}}$	f) $\dfrac{\sqrt[7]{3a^3}}{\sqrt[7]{-b}}$	g) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3$	h) $\left(\sqrt[5]{-4}\right)^2$
i) $\left(\sqrt[7]{(-2ab)}\right)^5$	j) $\sqrt{\sqrt[3]{11}}$	k) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-2}}$	l) $\sqrt[4]{\sqrt{5ab}}$
m) $\sqrt[6]{3^4}$	n) $\sqrt[21]{(-13)^7}$	ñ) $\sqrt[14]{(2yz)^6}$	o) $\left(\sqrt[5]{-9}\right)^5$
p) $\left(\sqrt[8]{17}\right)^8$	q) $\left(\sqrt{3bc}\right)^2$	r) $\sqrt[3]{(-2)^3}$	s) $\sqrt[4]{(-7)^4}$
t) $\sqrt[5]{(7xy)^5}$	u) $\sqrt{(a+b)^2}$	v) $\sqrt[3]{(a+b)^3}$	w) $\sqrt{x^2}$
x) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{5}$	y) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{b}$		

Las propiedades las vas a usar en la simplificación de radicales y en la racionalización de denominadores.

Simplificación de un radical

La simplificación de radicales es una habilidad esencial en álgebra que permite transformar expresiones con radicales en formas más simples y manejables. Esta técnica consiste en eliminar factores dentro del radicando, así como en reducir el índice del radical para reescribir la expresión en una forma simplificada. Simplificar un radical implica reducirlo a su mínima expresión posible.

Un radical está simplificado cuando:

- El índice no tiene factores comunes con el radicando.
- Se han extraído los factores que son raíces exactas.
- El radicando no tiene denominador.

Por ejemplo, están simplificados los siguientes radicales.

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a^2},\ 2\sqrt[3]{x},\ a^2b\sqrt[3]{ab^2}$$

No están expresados en su forma más simple los siguientes radicales:

$$\sqrt[6]{a^4},\ \sqrt[3]{a^5b^2},\ \sqrt{\frac{x+y}{x}}$$

Para simplificar un radical es común realizar las transformaciones siguientes:

Reducir el índice del radical

Extraer factores del radical

Reducción del índice del radical

Para reducir el índice del radical aplica la propiedad 5: $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$.

El procedimiento consiste en descomponer en factores el índice del radical y el exponente del radicando, luego cancelar factores comunes.

Para ver un ejemplo sobre la simplificación de radicales, escanea el código QR 1.5.

QR 1.5. Simplificar la raíz de expresiones con números. Video PruébaT. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 1.5

1. Reduce el índice de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{a^4}$ c) $\sqrt[9]{8x^3y^6}$

Resolución

a) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[2\cdot 2]{2^2} = \sqrt[2\cdot 2]{2^2} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[2\cdot 3]{a^{2\cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[9]{8x^3y^6} = \sqrt[3\cdot 3]{2^{3\cdot 1}x^{3\cdot 1}y^{3\cdot 2}} = \sqrt[3\cdot 3]{(2xy^2)^3} = \sqrt[3]{2xy^2}$

Actividad formativa 1.5

1. Reduce el índice de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[18]{6^{12}}$ b) $\sqrt[12]{b^4}$ c) $\sqrt[15]{32x^{10}y^5}$

Una vez que reduces el índice de un radical, de haber factores en el radicando con exponente mayor o igual al índice, lo que se hace es extraer factores del radical.

Extracción de factores del radical

Para extraer factores del radical, expresa el radicando en potencias perfectas o raíces exactas.

Ejemplo formativo 1.6

1. Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{a^6b^3c^2d}$ c) $\sqrt{24a^6b^3c^2d}$

Resolución

a) $\sqrt{24}$

Descompón el número 24 como producto de factores primos.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Dado que el índice del radical es 2, expresa los factores de 24 como el mayor cuadrado perfecto posible.

El cuadrado perfecto más grande que es factor de 24, es $4 = 2^2$.

El radicando exprésalo como:

$$24 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 6.$$

Así, $\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{a^6b^3c^2d}$

Dado que el índice del radical es 2, puedes expresar los factores a^6, b^3 y c^2, como producto de factores que tengan el mayor cuadrado perfecto:

- $a^6 = (a^3)^2$ es un cuadrado perfecto.
- $b^3 = b^2 \cdot b$, b^2 es el cuadrado perfecto más grande que es factor de b^3.
- c^2 es un cuadrado perfecto.

Expresa el radicando como: $a^6b^3c^2d = (a^3)^2\, b^2\, bc^2d$

Luego, $\sqrt{a^6b^3c^2d} = \sqrt{(a^3)^2b^2bc^2d} = \sqrt{(a^3)^2}\,\sqrt{b^2}\,\sqrt{c^2}\,\sqrt{bd} = a^3bc\sqrt{bd}$

c) $\sqrt{24a^6b^3c^2d}$

Descompón el número 24 como producto de factores primos:

$$24 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 6.$$

Luego, $\sqrt{24a^6b^3c^2d} = \sqrt{(2^2)(6)(a^3)^2b^2bc^2d} = \sqrt{2^2}\,\sqrt{(a^3)^2}\,\sqrt{b^2}\,\sqrt{c^2}\,\sqrt{6bd} = 2a^3bc\sqrt{6bd}$

Actividad formativa 1.6

1. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{60}$ c) $\sqrt{9y^3}$ d) $\sqrt[3]{72a^3b^2c^8}$

e) $\sqrt[4]{9a^2b^2}$ f) $\sqrt{50a^4b^3c}$ g) $\left(\sqrt[3]{ab}\right)^5$ h) $\left(\sqrt[3]{5a^3+b}\right)^8$

i) $\sqrt{\dfrac{18x^3}{y^2}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{11}}}$ k) $\sqrt{m^2+2mn+n^2}$ l) $\dfrac{\sqrt[4]{4+4m+m^2}}{\sqrt[3]{(1+m)^3}}$

m) $\sqrt[4]{\dfrac{81x^5y^4}{z^4}}$ n) $\sqrt{3(2x^2+3y^2)^2}$ ñ) $\sqrt{9m^2+18m^2n}$

o) $\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}$

Racionalización de denominadores

Al proceso de cancelar el radical del denominador se le llama racionalización del denominador. Dicho proceso, consiste en transformar una fracción numérica o fracción algebraica cuyo denominador es un radical, en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga ningún radical.

Racionalización de denominadores de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$

Para racionalizar el denominador en una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $m < n$, multiplica el numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

Ejemplo formativo 1.7

1. Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\dfrac{3x}{\sqrt{7x}}$ d) $\dfrac{c}{\sqrt[4]{3a^2bc^3}}$

e) $\dfrac{x^2-y^2}{2x\sqrt{x+y}}$

Resolución

a) $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) $$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{2\cdot 5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{50}}{5}$$

c) $$\frac{3x}{\sqrt{7x}} = \frac{3x}{\sqrt{7x}}\cdot\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7x}} = \frac{3x\cdot\sqrt{7x}}{\sqrt{(7x)^2}} = \frac{3x\sqrt{7x}}{7x}$$

d) $$\frac{c}{\sqrt[4]{3a^2bc^3}} = \frac{c}{\sqrt[4]{3a^2bc^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3a^2b^3c}}{\sqrt[4]{3^3a^2b^3c}} = \frac{c\sqrt[4]{3^3a^2b^3c}}{\sqrt[4]{3^4a^4b^4c^4}} = \frac{c\sqrt[4]{3^3a^2b^3c}}{3abc} = \frac{\sqrt[4]{3^3a^2b^3c}}{3abc}$$

e) $$\frac{x^2-y^2}{2x\sqrt{x+y}} = \frac{x^2-y^2}{2x\sqrt{x+y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}} = \frac{(x^2-y^2)\sqrt{x+y}}{2x\sqrt{(x+y)^2}} = \frac{(x-y)(x+y)\sqrt{x+y}}{2x(x+y)} = \frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{2x}$$

Actividad formativa 1.7

1. Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{3}{4\sqrt[3]{5}}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3x}}{\sqrt{7x}}$ d) $\dfrac{a}{b\sqrt[4]{a^3b}}$

e) $\dfrac{2x}{\sqrt[4]{2xy^3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{7x}}{\sqrt[3]{9x^2}}$ g) $\sqrt{\dfrac{3}{x-1}}$ h) $\sqrt{\dfrac{a}{b^2c}}$

Racionalización de denominadores mediante el conjugado

Para racionalizar el denominador de una fracción cuyo denominador es la suma o diferencia de dos términos, de los cuales, por lo menos uno contiene un radical de índice dos, lo que se hace es multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Expresión radical	Conjugado	Producto de la expresión radical por su conjugado
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
$\sqrt{3}-2\sqrt{b}$	$\sqrt{3}+2\sqrt{b}$	$(\sqrt{3}-2\sqrt{b})(\sqrt{3}+2\sqrt{b})=3-4b$
$5a+\sqrt{7b}$	$5a-\sqrt{7b}$	$(5a+\sqrt{7b})(5a-\sqrt{7b})=25a^2-7b$
$a-\sqrt{b}$	$a+\sqrt{b}$	$(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})=a^2-b$

Cuando multiplicas una expresión radical (que es la suma o resta de dos términos) por su conjugado, obtienes una expresión sin radicales.

Ejemplo formativo 1.8

1. Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-3}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ d) $\dfrac{\sqrt{a}}{3a+2\sqrt{a}}$

Resolución

a) $$\frac{3}{\sqrt{7}-3}=\frac{3}{\sqrt{7}-3}\cdot\frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}+3}=\frac{3(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)}=\frac{3(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{7})^2-(3)^2}=\frac{3(\sqrt{7}+3)}{7-9}=-\frac{3(\sqrt{7}+3)}{2}$$

b) $$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}\cdot\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}=\frac{2\sqrt{25}-\sqrt{30}}{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{10-\sqrt{30}}{14}$$

c) $$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

d) $$\frac{\sqrt{a}}{3a+2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}(3a-2\sqrt{a})}{(3a+2\sqrt{a})(3a-2\sqrt{a})}=\frac{3a\sqrt{a}-2a}{9a^2-4a}=\frac{a(3\sqrt{a}-2)}{a(9a-4)}=\frac{3\sqrt{a}-2}{9a-4}$$

Actividad formativa 1.8

1. Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ d) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$ f) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ g) $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$ h) $\dfrac{3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

EVALUACIÓN FORMATIVA 1.1

1. Simplifica las siguientes expresiones.

   a) $\sqrt[3]{x^6y^3} \cdot \sqrt{x^2y}$ b) $\dfrac{(x^{1/2}y^{2/3})^6}{x^{3/2}y^{4/3}}$ c) $(x^2y^3)^{1/4}(xy)^{-1/2}$ d) $\sqrt{\dfrac{x^{3/2}y^{5/2}}{x^{1/2}y^{-1/2}}}$

2. Racionaliza el denominador y simplifica.

   a) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7^2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

   e) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2a\sqrt{b}}$

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué correctamente las leyes de los exponentes y las propiedades de los radicales para simplificar y racionalizar denominadores de expresiones algebraicas. (M1-C1)			
Identifiqué patrones en las expresiones algebraicas y seleccioné las leyes matemáticas adecuadas para simplificarlas. (M1-C2)			
Utilicé modelos matemáticos apropiados como potencias y radicales para simplificar expresiones algebraicas. (M1-C3)			
Expresé con precisión el proceso de simplificar o racionalizar expresiones algebraicas utilizando terminología matemática adecuada. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 1 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Aplicó correctamente las leyes de los exponentes y las propiedades de los radicales para simplificar y racionalizar denominadores de expresiones algebraicas. (M1-C1)			
Identificó patrones en las expresiones algebraicas y seleccionó las leyes matemáticas adecuadas para simplificarlas. (M1-C2)			
Utilizó modelos matemáticos apropiados como potencias y radicales para simplificar expresiones algebraicas. (M1-C3)			
Expresó con precisión el proceso de simplificar o racionalizar expresiones algebraicas utilizando terminología matemática adecuada. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Productos notables

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$
$$(x+b)(x+c)=x^2+(b+c)\,x+bc$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

Progresión de aprendizaje 2

Analiza la estructura de los productos notables para deducir fórmulas generales, y desarrolla problemas que demuestren la aplicación de estos productos en situaciones de la vida real.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 2.1

Realiza las operaciones indicadas y selecciona la respuesta correcta.

1. $(5xy)(xy^2)=$

   a) $5x^2y^2$ b) $5x^2y^3$ c) $5x^3y^2$

2. $5xy(3x^3y^2-3x+4y-2)=$

   a) $15x^4y^3-15x^2y+20xy^2-10xy$
   b) $15x^4y^3+15x^2y+20x^2y-10xy$
   c) $15x^4y^3-15x^2y+20x^2y+10xy$

3. $(x+5)(x-5)=$

   a) x^2+25 b) $-x^2-25$ c) x^2-25

4. $(a+2)(a^2-2a+4)=$

   a) a^3+8 b) a^3-8 c) $-a^3+8$

5. $(2x+3)(2x+4) =$

   a) $4x^2+14x+7$ b) $4x^2+14x+12$ c) $4x^2+12$

6. $(3x+y)(3x+y)(3x+y) =$

   a) $27x^3-27x^2y+9x^2y+y^3$

   b) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

   c) $27x^3-27x^2y-9x^2y-y^3$

7. $(6y^2+2x^2+5xy)(3x^2-4y^2+2xy) =$

   a) $6x^4+24y^4+19x^3y+8xy^3+20x^2y^2$

   b) $6x^4-24y^4-19x^3y-8xy^3-20x^2y^2$

   c) $6x^4-24y^4+19x^3y-8xy^3+20x^2y^2$

Productos notables

Al realizar la multiplicación de polinomios hay casos especiales en los que puedes obtener el resultado siguiendo una regla sin necesidad de realizar la multiplicación. A la multiplicación indicada de estos polinomios los llamamos productos notables.

¿Por qué son útiles los productos notables?

- Ahorran tiempo al desarrollar productos.
- Facilitan la factorización.
- Son base para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas.
- Aparecen en muchos problemas de física, geometría y economía.

En esta progresión vas a analizar los procedimientos que permiten desarrollar diversos productos notables sin realizar la multiplicación. Para profundizar más sobre los productos notables ve el video a través del código QR 2.1.

QR 2.1. Productos notables. Video de PruébaT. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Producto de dos binomios conjugados

Si tienes un binomio del tipo $a+b$, entonces $a-b$ es su conjugado y viceversa. Al multiplicarlos

$$(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b) = a^2-ab+ab-b^2$$
$$= a^2-b^2$$

QR 2.2. Binomios conjugados. Video de KhanAcademy. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

El resultado obtenido se llama diferencia de cuadrados.

Para realizar el producto de dos binomios conjugados aplica la siguiente regla. El producto de un binomio por su conjugado es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. En el código QR 2.2 puedes ver un ejemplo. Nota: Para aplicar la regla mencionada anteriormente es importante el orden de cada término, primero debe ser el término común y en segundo lugar el término simétrico u opuesto. Ejemplo: $(-x+3)(x+3) = (3-x)(3+x) = 9-x^2$

Ejemplo formativo 2.1

1. Desarrolla los siguientes productos aplicando la regla del producto de dos binomios conjugados

   a) $(x+3)(x-3)$ b) $(m+n)(m-n)$ c) $(2a-5)(2a+5)$

   d) $\left(\frac{m}{3}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{m}{3}+\frac{3}{4}\right)$ e) $(2x-3y)(2x+3y)$ f) $(5x^2+6)(5x^2-6)$

   g) $(a^2b-c)(a^2b+c)$

Resolución

a) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

b) $(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$

c) $(2a - 5)(2a + 5) = 4a^2 - 25$

d) $\left(\frac{m}{3} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{m}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{m^2}{9} - \frac{9}{16}$

e) $(2x - 3y)(2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2$

f) $(5x^2 + 6)(5x^2 - 6) = 25x^4 - 36$

g) $(a^2b - c)(a^2b + c) = a^4b^2 - c^2$

2. Determina el área de un jardín que tiene las siguientes dimensiones: $(x + 4)$ de largo y $(x - 4)$ de ancho.

Resolución

Largo: $(x + 4)$

Ancho: $(x - 4)$

$(x + 4)\,(x - 4) = x^2 - 16$

El área del terreno es $x^2 - 16$.

Actividad formativa 2.1

1. Desarrolla los siguientes productos aplicando la regla del producto de dos binomios conjugados.

a) $(a + 1)(a - 1)$

b) $(3m + 2)(3m - 2)$

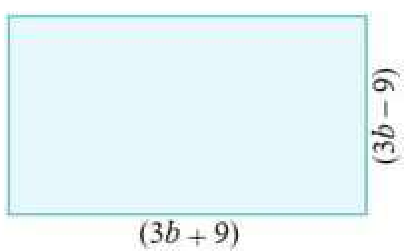
c) $(2a^3 - 3)(2a^3 + 3)$

d) $\left(\frac{2}{3}a + 0.2\right)\left(\frac{2}{3}a - 0.2\right)$

e) $(-t + 5)(t + 5)$

f) $(0.2t + 0.1)(0.2t - 0.1)$

2. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo que se muestra en la siguiente figura.



Binomio al cuadrado

La expresión $(x + y)^2$ es un binomio al cuadrado y se puede expresar como un producto.

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Al resultado de desarrollar un binomio al cuadrado se le conoce como trinomio cuadrado perfecto.

Para desarrollar un binomio al cuadrado aplica la siguiente regla. El cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término. En el código QR 2.3 puedes ver un ejemplo.

QR 2.3. Binomio al cuadrado. Video de KhanAcademy. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 2.2

1. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando la regla del binomio al cuadrado.

a) $(x+3)^2$ b) $(-m-n)^2$ c) $(2a-5)^2$ d) $(-2x+3y)^2$

e) $(5x^2+6)^2$ f) $(a^2b-c)^2$ g) $\left(\frac{m}{3}-\frac{3}{4}\right)^2$

Resolución

a) $(x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(-m-n)^2 = (-m)^2 + 2(-m)(-n) + (-n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

c) $(2a-5)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(-5) + (-5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$

d) $(-2x+3y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

e) $(5x^2+6)^2 = (5x^2)^2 + 2(5x^2)(6) + (6)^2 = 25x^4 + 60x^2 + 36$

f) $(a^2b-c)^2 = (a^2b)^2 + 2(a^2b)(-c) + (-c)^2 = a^4b^2 - 2a^2bc + c^2$

g) $\left(\frac{m}{3}-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{m}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{m^2}{9} - \frac{m}{2} + \frac{9}{16}$

Actividad formativa 2.2

1. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando la regla del binomio al cuadrado.

a) $(a-1)^2$ b) $(3rs-2t)^2$ c) $(ax+b)^2$

d) $\left(\frac{2}{3}a+0.2\right)^2$ e) $\left(\frac{a}{4}-\frac{2b^2}{3}\right)^2$

2. Halla el área de una plaza cuadrada de lado igual a $(x+2)$ metros.

Producto de dos binomios con un término común

En una multiplicación $(x+a)(x+b)$ observa que los factores tienen como término común a x. Al multiplicarlos, obtienes

$$(x+b)(x+c) = x^2 + (b+c)x + bc$$

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común por la suma de los no comunes, más el producto de los términos no comunes. En el código QR 2.4 puedes ver un ejemplo.

QR 2.4. Binomios con un término común. Video de PruébaT. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 2.3

1. Desarrolla los siguientes productos aplicando la regla del producto de binomios con un término común.

a) $(x+5)(x+3)$ b) $(2x-3)(2x+7)$ c) $(m+2n)(m+p)$

d) $(2a+3)(2a-0.5)$ e) $(t^2-1)(t^2+3)$ f) $(x+2y-3)(x+5+2y)$

Resolución

a) $(x + 5)(x + 3) = x^2 + (3 + 5)x + 15 = x^2 + 8x + 15$

b) $(2x - 3)(2x + 7) = 4x^2 + (-3 + 7)2x - 21 = 4x^2 + 8x - 21$

c) $(m + 2n)(m + p) = m^2 + (2n + p)m + 2np$

d) $(2a + 3)(2a - 0.5) = 4a^2 + (3 - 0.5)2a - 1.5 = 4a^2 + 5a - 1.5$

e) $(t^2 - 1)(t^2 + 3) = t^4 + (-1 + 3)t^2 - 3 = t^4 + 2t^2 - 3$

f) $$\begin{aligned}(x + 2y - 3)(x + 5 + 2y) &= [(x + 2y) - 3][(x + 2y) + 5]\\ &= (x + 2y)^2 + (-3 + 5)(x + 2y) - 15\\ &= (x + 2y)^2 + 2(x + 2y) - 15\\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 15\end{aligned}$$

Actividad formativa 2.3

1. Desarrolla los siguientes productos aplicando la regla del producto de dos binomios con un término común.

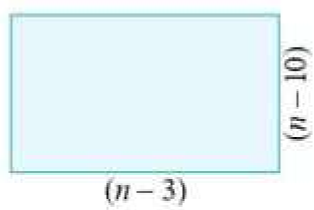
a) $(m + 3n)(m - 2n)$ b) $(2r - 5)(2r - 7)$ c) $(t - 5)(t + 1.5)$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ e) $(a - 2b)(a + 5b)$ f) $(3s^2 + 5)(3s^2 - 2)$

g) $(0.2x + 5y)(0.2x + 3y)$ h) $(4 - t)(5 + t)$ i) $(x - 3 + y)(y + 5 + x)$

j) $(x + 499)(x + 1)$

2. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo que se muestra en la siguiente figura.



Binomio al cubo

La expresión $(x + y)^3$ es un binomio al cubo y se puede expresar como un producto.

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y)\\ &= (x + y)(x^2 + xy + yx + y^2)\\ &= x^3 + x^2y + yx^2 + xy^2 + yx^2 + xy^2 + y^2x + y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Para desarrollar un binomio al cubo aplica la siguiente regla: el cubo del primer término, más tres veces el cuadrado del primer término por el segundo término, más tres veces el primer término por el cuadrado del segundo término y más el cubo del segundo término. En el código QR 2.5 puedes ver un ejemplo.

QR 2.5. Binomio al cubo. Video de PruébaT. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 2.4

1. Desarrolla la expresión $(x - y)^3$ aplicando la regla del binomio al cubo.

   Resolución

   Binomio al cubo: $(x - y)^3$

   x^3: el cubo del primer término.

   $3x^2(-y)$: tres veces el cuadrado del primer término por el segundo término.

   $3x(-y)^2$: tres veces el primer término por el cuadrado del segundo término.

   $(-y)^3$: el cubo del segundo término.

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Una opción para el desarrollo de un binomio al cubo es usar el triángulo de pascal como se muestra en el video del código QR 2.6.

QR 2.6. Triángulo de pascal. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 2.5

1. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando la regla del binomio al cubo.

   a) $(a - 5)^3$ b) $(2x + 5)^3$ c) $(a^2 + b)^3$ d) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^3$

   Resolución

   a) $$\begin{aligned}(a-5)^3 &= a^3 + 3a^2(-5) + 3a(-5)^2 + (-5)^3\\ &= a^3 - 15a^2 + 3a(25) - 125\\ &= a^3 - 15a^2 + 75a - 125\end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned}(2x+5)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 + (5)^3\\ &= 8x^3 + 3(4x^2)(5) + 6x(25) + 125\\ &= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125\end{aligned}$$

   c) $$\begin{aligned}(a^2+b)^3 &= (a^2)^3 + 3(a^2)^2b + 3a^2b^2 + b^3\\ &= a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3\end{aligned}$$

   d) $$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^3 &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(-\frac{y}{3}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{y}{3}\right)^2 + \left(-\frac{y}{3}\right)^3\\ &= \frac{x^3}{8} - 3\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{y}{3}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y^2}{9}\right) - \frac{y^3}{27}\\ &= \frac{x^3}{8} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6} - \frac{y^3}{27}\end{aligned}$$

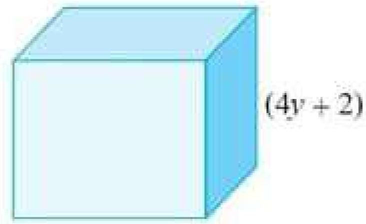
Actividad formativa 2.4

1. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando la regla del binomio al cubo.

   a) $(x - 3)^3$ b) $(x + 5b)^3$ c) $(3t + 2)^3$ d) $(2a - b)^3$

   e) $(0.5 + 3t)^3$ f) $\left(-\frac{s}{3} - 0.3t\right)^3$ g) $\left(\frac{a}{2} - b^2\right)^3$ h) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{y}{2}\right)^3$

2. Determina la expresión polinomial que corresponde al volumen del cubo de la figura que se muestra a continuación.



EVALUACIÓN FORMATIVA 2.1

1. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando las reglas de los productos notables según corresponda.

a) $(m+n^2)^2$ b) $(x+3)(x-3)$ c) $(x+6)(x-7)$

d) $(m+n^2)^3$ e) $(5a^2-1)^2$ f) $(5+3y)(5-3y)$

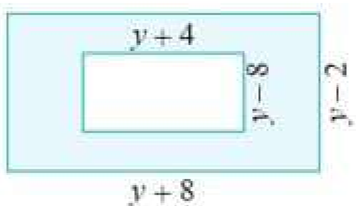
g) $(z+8)(z-11)$ h) $(2a^2-5)^3$ i) $(-2a-0.1)^2$

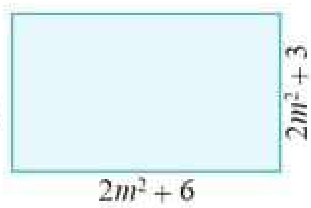
j) $(2x+5y)(2x-5y)$ k) $(p+20)(p-5)$ l) $\left(\frac{x}{3}+0.3y\right)^3$

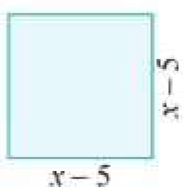
m) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)^2$ n) $\left(p+\frac{2}{3}\right)\left(p-\frac{2}{3}\right)$ ñ) $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{3}{2}\right)$

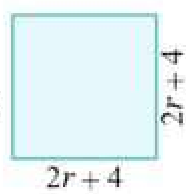
o) $\left(\frac{t^3}{2}+\frac{s^2}{3}\right)^3$ p) $\left(3\sqrt[3]{2x}-2\sqrt[3]{2y}\right)^3$

2. Determina la expresión polinomial que corresponda al área sombreada para cada figura.

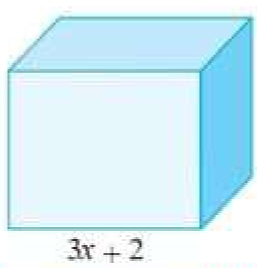
a) 

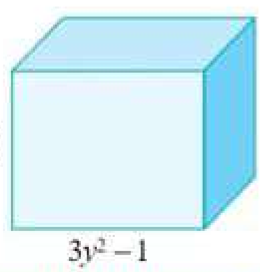
b) 

c) 

d) 

3. Halla una expresión polinomial que corresponda al volumen del cubo de cada figura.

a) 

b) 

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ___________________________ Plantel: _________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 2. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué correctamente las reglas de los productos notables en el desarrollo de expresiones. (M1-C1)			
Identifiqué un producto notable al observar los elementos que lo componen. (M1-C2)			
Seleccioné las reglas adecuadas de los productos notables para desarrollar expresiones. (M1-C3)			
Describí con lenguaje matemático el proceso de desarrollo de un producto notable. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Aplicó correctamente las reglas de los productos notables en el desarrollo de expresiones. (M1-C1)			
Identificó un producto notable al observar los elementos que lo componen. (M1-C2)			
Seleccionó las reglas adecuadas de los productos notables para desarrollar expresiones. (M1-C3)			
Describió con lenguaje matemático el proceso de desarrollo de un producto notable. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Factorización de polinomios

a) $9x^2y^4 - 16z^6w^2$
b) $x^2 + 5x + 6$
c) $x^2 + 6x + 9$
d) $8x^3 - 27y^3$
e) $6x^2y^5 + 3x^3y^4$
f) $8x^3 + 27y^3$
g) $3x^2 + 11x + 10$
h) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

( ) Binomios que son diferencia de cuadrados
( ) Binomios que son diferencia de cubos
( ) Binomios que son suma de cubos
( ) Binomio al cubo
( ) Trinomio cuadrado perfecto
( ) Trinomio de la forma $x^2 + px + q$
( ) Trinomio de la forma $mx^2 + px + q$
( ) Polinomio con factor común

Progresión de aprendizaje 3

Valora la eficacia de diferentes métodos de factorización para diversos tipos de polinomios, y elabora un árbol de decisión que guíe la selección del método más apropiado para factorizar cualquier polinomio dado.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
MI-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
MI-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
MI-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGÓSTICA 3.1

1. Relaciona la expresión algebraica con el tipo de expresión de la cual se obtiene.

a) $9x^2y^4 - 16z^6w^2$ ( ) Binomios que son diferencia de cuadrados
b) $x^2 + 5x + 6$ ( ) Binomios que son diferencia de cubos
c) $x^2 + 6x + 9$ ( ) Binomios que son suma de cubos
d) $8x^3 - 27y^3$ ( ) Binomio al cubo
e) $6x^2y^5 + 3x^3y^4$ ( ) Trinomio cuadrado perfecto
f) $8x^3 + 27y^3$ ( ) Trinomio de la forma $x^2 + px + q$
g) $3x^2 + 11x + 10$ ( ) Trinomio de la forma $mx^2 + px + q$
h) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ ( ) Polinomio con factor común

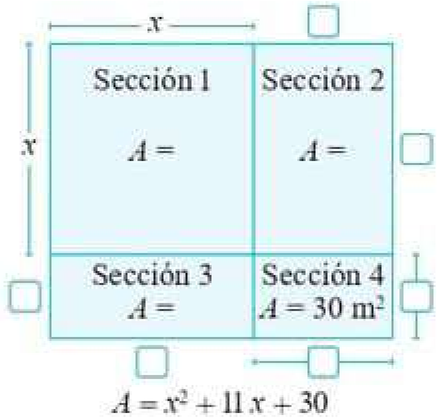
Factorización de polinomios

La **factorización** es el proceso de descomponer un número o una expresión algebraica en sus factores. Los factores son números o expresiones que, al multiplicarse, dan como resultado el número o la expresión original. Por ejemplo, el número 12 se puede factorizar en 3 y 4, ya que (3)(4) = 12. Debes tener presente que puede haber más de una forma de expresar el número 12 como un producto de factores, por ejemplo, (6)(2) = 12, también puede tener más de dos factores, como (3)(2)(2) = 12, De manera similar, esto aplica para factorizar expresiones algebraicas polinomiales, también llamados polinomios.

En la progresión de aprendizaje anterior, aprendiste sobre productos notables, por ejemplo, el binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, por lo que posees bases para entender la factorización de polinomios. La **factorización** es, en cierto modo, el proceso inverso a los productos notables. Mientras que los productos notables te permiten expandir expresiones, la factorización te ayuda a descomponer esas expresiones en factores más simples. Existen diferentes métodos de factorización, según el tipo de polinomio que estés tratando.

Actividad formativa 3.1

1. Un agricultor desea construir una cerca alrededor de un campo de forma rectangular con área igual a $x^2 + 11x + 30$ metros cuadrados. Para ello, debe conocer sus dimensiones (largo y ancho). Completa la siguiente figura para ayudar al agricultor atendiendo las siguientes sugerencias.



   a) El agricultor decidió dividir el campo en cuatro secciones, la sección 1 forma un cuadrado de lado x.

   Calcula y escribe en el centro su área correspondiente.

   La sección 4, que forma el rectángulo más pequeño tiene un área de 30 m². Encuentra los valores de sus dimensiones largo y ancho, factoriza el 30.

   Complementa con esas medidas en el resto de los recuadros los valores de las dimensiones faltantes alrededor de la figura de la izquierda según correspondan.

   Calcula las áreas de las figuras formadas en la sección 2 y 3.

   b) Área sección 1 + Área sección 2 + Área sección 3 + Área sección 4 = Área del campo

   $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

   c) Compara el resultado con la expresión $x^2 + 11x + 30$, ¿son iguales? Si no lo es, prueba con otra descomposición factorial de 30.

   d) Escribe la expresión que corresponde al largo del campo según la anterior que ya completaste, suma el largo de las secciones 3 y 4: ______________________________

   e) Escribe la expresión que corresponde al ancho del campo según la anterior que ya completaste, suma el lado de la sección 1 y el ancho de la sección 3: ______________________

   f) Escribe la operación para calcular el área del campo, que se trata de un producto notable: ____
   ____

   g) El resultado de dicha operación es igual a: ______________________________

   h) Como recordarás la factorización es el proceso inverso a los productos notables. Por tanto, la factorización de $x^2 + 11x + 30$ es igual a: ______________________________

Para comprender más el modelo usado en la Actividad formativa 3.1, ve el video a través del código QR 3.1.

QR 3.1. Producto de binomios con término común. Video de Hospital de Matemáticas. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

En el planteamiento del campo agrícola ayudaste al agricultor a conocer el largo y el ancho del campo, con ello podrá conocer el perímetro del mismo para saber cuántos metros de cerca necesitará. El análisis y comprobación de dicha situación es un claro ejemplo de aplicación de la factorización de polinomios, específicamente has aplicado el modelo de factorización de trinomios de la forma $x^2 + px + q$. El procedimiento de este y otros modelos para factorizar polinomios se presentan a continuación en la siguiente tabla.

Método de factorización	Nombre del producto notable obtenido	Procedimiento para factorizarlo	Ejemplo resuelto
Factorización por factor común QR 3.2. Video del profe Daniel Carrión. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	No tiene un nombre específico. Se descompone en el producto de un factor común de lo de los términos por otro polinomio.	Paso 1. Encuentra el factor común, busca el número (divisor) y/o letra con menor exponente que se repita en todos los términos del polinomio. Paso 2. Escribe el factor común fuera de un paréntesis y divide cada término del polinomio por ese factor común. Paso 3. Obtén el resultado, dentro del paréntesis escribe lo que queda después de dividir cada término.	**Factorizar $10x^2 + 5x$** Paso 1. **5** es divisor de ambos coeficientes (de 10 y 5) y $\boldsymbol{x}$ se repite en ambos términos y es el de menor exponente. Por lo que **$5x$** es el factor común. Paso 2. Coloca el factor común seguido de paréntesis **$5x(\quad)$** y divide cada término entre el factor común: $\frac{10x^2}{5x} = \mathbf{2x} \qquad \frac{5x}{5x} = \mathbf{1}$ Paso 3. Escribe el resultado de cada división dentro del paréntesis: **$5x(2x+1)$** Resultado: $\mathbf{10x^2 + 5x = 5x(2x+1)}$
Factorización de binomios que son diferencia de cuadrados QR 3.3. Video del profe Daniel Carrión. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	Producto de dos binomios conjugados	Paso 1. Extrae la raíz cuadrada de ambos términos, toma solo la raíz positiva. Paso 2. Escribe el resultado, se obtiene el producto de dos binomios conjugados, es decir, se multiplica la suma de las raíces cuadradas por la diferencia de las mismas raíces: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$	**Factorizar $x^2 - 16$** Paso 1. Obtén la raíz cuadrada de ambos términos: $\sqrt{x^2} = \boldsymbol{x} \qquad \sqrt{16} = \mathbf{4}$ Paso 2. Expresa el resultado como el producto de dos binomios conjugados: Resultado: $\boldsymbol{x^2 - 16 = (x-4)(x+4)}$

Factorización de binomios que son suma o diferencia de cubos QR 3.4. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	No tiene un nombre específico. Se descompone en el producto de un binomio por un trinomio.	**La suma de un binomio al cubo se descompone en dos factores:** Paso 1. Primer factor es la suma de las raíces cúbicas de ambos términos. Paso 2. Segundo factor es el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, **más** el cuadrado de la segunda raíz. Escribe el resultado basándote en la fórmula: Signo – $\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$	**Factorizar $27x^3 + 125$** Paso 1. Primer factor, calcula la raíz cúbica de ambos términos del binomio: $\sqrt[3]{27x^3} = 3x \quad \sqrt[3]{125} = 5$ Por tanto, la suma de las raíces cúbicas de ambos términos es igual a: $\mathbf{(3x + 5)}$ primer factor Paso 2. Segundo factor, eleva al cuadrado la primera raíz del primer factor, **menos** el producto de ambas raíces, **más** el cuadrado de la segunda raíz: $(3x)^2 = 9x^2$ $(3x)(5) = 15x$ $(5)^2 = 25$ $\mathbf{(9x^2 - 15x + 25)}$ segundo factor Escribe el resultado colocando ambos factores: Resultado: $\mathbf{27x^3 + 125 =}$ $\mathbf{(3x + 5)(9x^2 - 15x + 25)}$
		La diferencia de un binomio al cubo se descompone en dos factores: Paso 1. Primer factor es la diferencia de las raíces cúbicas de ambos términos. Paso 2. Segundo factor es el cuadrado de la primera raíz, **más** el producto de las dos raíces, **más** el cuadrado de la segunda raíz. Escribe el resultado basándote en la fórmula: Signo + $\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$	**Factorizar $27x^3 - 125$** Paso 1. Primer factor, calcula la raíz cúbica de ambos términos del binomio: $\sqrt[3]{27x^3} = 3x \quad \sqrt[3]{125} = 5$ Por tanto, la diferencia de las raíces cúbicas de ambos términos es igual a: $\mathbf{(3x - 5)}$ primer factor Paso 2. Segundo factor, eleva al cuadrado la primera raíz del primer factor, **más** el producto de ambas raíces, **más** el cuadrado de la segunda raíz: $(3x)^2 = 9x^2$ $(3x)(5) = 15x$ $(5)^2 = 25$ $(9x^2 + 15x + 25)$ segundo factor Escribe el resultado colocando ambos factores: Resultado: $\mathbf{27x^3 - 125 =}$ $\mathbf{(3x - 5)(9x^2 + 15x + 25)}$

Factorización de trinomios cuadrados perfectos QR 3.5. Video del profe Daniel Carrión. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	Binomio al cuadrado o el producto de dos binomios iguales.	Paso 1. Extrae la raíz cuadrada al primer y tercer término del trinomio. Comprueba que el segundo término del trinomio sea el doble de la primera raíz por la segunda raíz. Paso 2. Escribe las raíces separadas por el signo del segundo término. Paso 3. Expresa el resultado, se obtiene un binomio que se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado. $a^2 + 2ab + b = (a + b)^2$ o $a^2 - 2ab + b = (a - b)^2$	**Factorizar $36x^2 - 24xy^4 + 4y^8$** Paso 1. Calcula la raíz cuadrada al primer y tercer término del trinomio: $\sqrt{36x^2} = 6x \qquad \sqrt{4y^8} = 2y^4$ Comprueba que el segundo término del trinomio sea el doble de la primera raíz por la segunda raíz: $2(6x)(2y^4) = 24xy^4$ Paso 2. Separa las dos raíces por el signo del segundo término $6x - 2y^4$ Paso 3. Expresa el resultado como un binomio al cuadrado Resultado: $36x^2 - 24xy^4 + 4y^8 = (6x - 2y^4)^2$
Factorización de trinomios de la forma $x^2 + px + q$ QR 3.6. Video del profe Daniel Carrión. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	Producto de dos binomios con un término común.	Paso 1. Extrae la raíz cuadrada al primer término del trinomio, toma la positiva y colócala en los dos factores binomios. Paso 2. En el primer factor, después de x escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor, después de x escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término por el signo del tercero. Paso 3. Encuentra y escribe los segundos términos de los factores binomios. • Si los dos factores binomios tienen signos iguales, busca dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio multiplicado por la raíz obtenida en el paso 1 y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. • Si los dos factores binomios tienen signos distintos, busca dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio multiplicado por la raíz obtenida en el paso 1 y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El mayor de estos números lo escribes en el primer binomio y el menor en el segundo binomio. $x^2 + 2px + q = (x + a)(x + b)$ donde $a + b = p$ y $a \cdot b = q$	**Factorizar $x^2 + 5x + 6$** Paso 1. Calcula la raíz cuadrada al primer término del trinomio. $\sqrt{x^2} = x$ y la escribe en los dos factores $(x \quad)(x \quad)$ Paso 2. Coloca los signos $(x + \quad)(x + \quad)$ Paso 3. Los signos son iguales, por lo que debes buscar dos números que sumados y multiplicados por x den $5x$, y su producto sea 6, esto es: $(3 + 2)(x) = 5x$ $(3)(2) = 6$ El resultado es: **Resultado:** $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

Factorización de trinomios de la forma $mx^2 + px + q$ QR 3.7. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	No tiene un nombre específico. Se descompone en el producto de dos binomios.	Paso 1. Identifica los valores de $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ del trinomio: • $\boldsymbol{m}$ es el coeficiente de x^2 • $\boldsymbol{p}$ es el coeficiente de x • $\boldsymbol{q}$ es el término constante Paso 2. Encuentra dos números que multiplicados den $\boldsymbol{m \cdot q}$ y sumados den $\boldsymbol{p}$, a los que llamaremos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Paso 3. Reescribe el trinomio descomponiendo el término medio usando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{mx^2 + ax + bx + q}$ Paso 4. Agrupa los términos en dos binomios: $\boldsymbol{(mx^2 + ax) + (bx + q)}$. Paso 5. Saca el factor común de cada binomio por separado. Paso 6. Factoriza por agrupación y resultará el producto de dos binomios.	**Factorizar $18x^2 - 13x - 5$** Paso 1. Identifica los valores de $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ del trinomio: • $\boldsymbol{m} = 18$ • $\boldsymbol{p} = -13$ • $\boldsymbol{q} = -5$ Paso 2. Busca dos números que multiplicados den $\boldsymbol{m \cdot q}$ y sumados den $\boldsymbol{p}$ y llámalos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. $m \cdot q = (-18)(5) = -90$ $-18 + 5 = -13$ dan $\boldsymbol{p}$ $a = -18 \quad b = 5$ Paso 3. Reescribe el trinomio incluyendo a y b: $\boldsymbol{18x^2 - 18x + 5x - 5}$ Paso 4. Agrupa en dos binomios: $\boldsymbol{(18x^2 - 18x) + (5x - 5)}$ Paso 5. Saca el factor común: $\boldsymbol{18x(x - 1) + 5(x - 1)}$ Paso 6. Vuelve a factorizar: Resultado: $\boldsymbol{18x^2 - 13x - 5 = (18x + 5)(x - 1)}$
Factorización de polinomios por agrupación QR 3.8. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.	No tiene un nombre específico. Se descompone en el producto de dos polinomios.	Paso 1. Agrupa los términos del polinomio en dos pares de la manera que consideres más conveniente. Paso 2. Factoriza por factor común de cada grupo y escríbelos en una sola expresión. Paso 3. Nuevamente factoriza por factor común y el resultado estará dado por el producto de dos polinomios.	**Factorizar $3x^2 - 6xy + 4x - 8y$** Paso 1. Agrupa en dos: $\boldsymbol{(3x^2 - 6xy) + (4x - 8y)}$ Paso 2. Factoriza por factor común de cada grupo: $\boldsymbol{3x(x - 2y) + 4(x - 2y)}$ Paso 3. Factoriza nuevamente por factor común la expresión obtenida. Resultado: $\boldsymbol{3x^2 - 6xy + 4x - 8y =}$ $\boldsymbol{(x - 2y)(3x + 4)}$

Hay polinomios que dentro del conjunto de número reales no se pueden factorizar más de lo que aparece en su expresión y se llaman polinomios irreducibles (está formulado en su mínima expresión). En la Figura 3.1 se muestra un árbol de decisión para la factorización de polinomios que guía el proceso de descomposición de un polinomio en factores más simples, siguiendo una serie de pasos organizados jerárquicamente. En cada nivel del árbol, se plantea una pregunta clave, ¿cómo determinar si el polinomio tiene un factor común, si es un trinomio cuadrado perfecto, si se puede factorizar mediante agrupación o si es una diferencia de cuadrados? A partir de cada respuesta, el árbol ramifica hacia el procedimiento adecuado hasta alcanzar la factorización completa, siempre que se pueda factorizar.

Árbol de decisión para factorizar polinomios

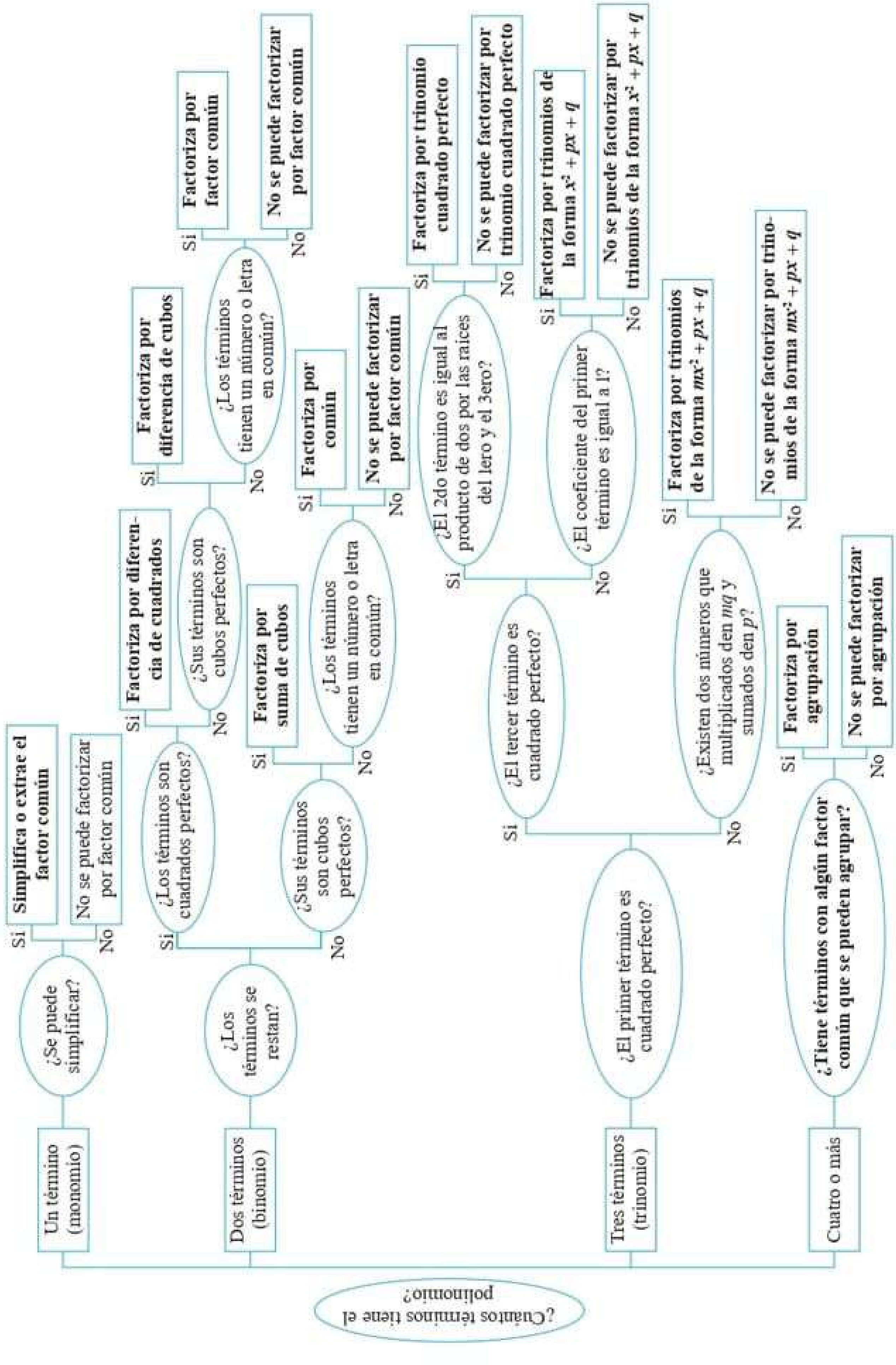
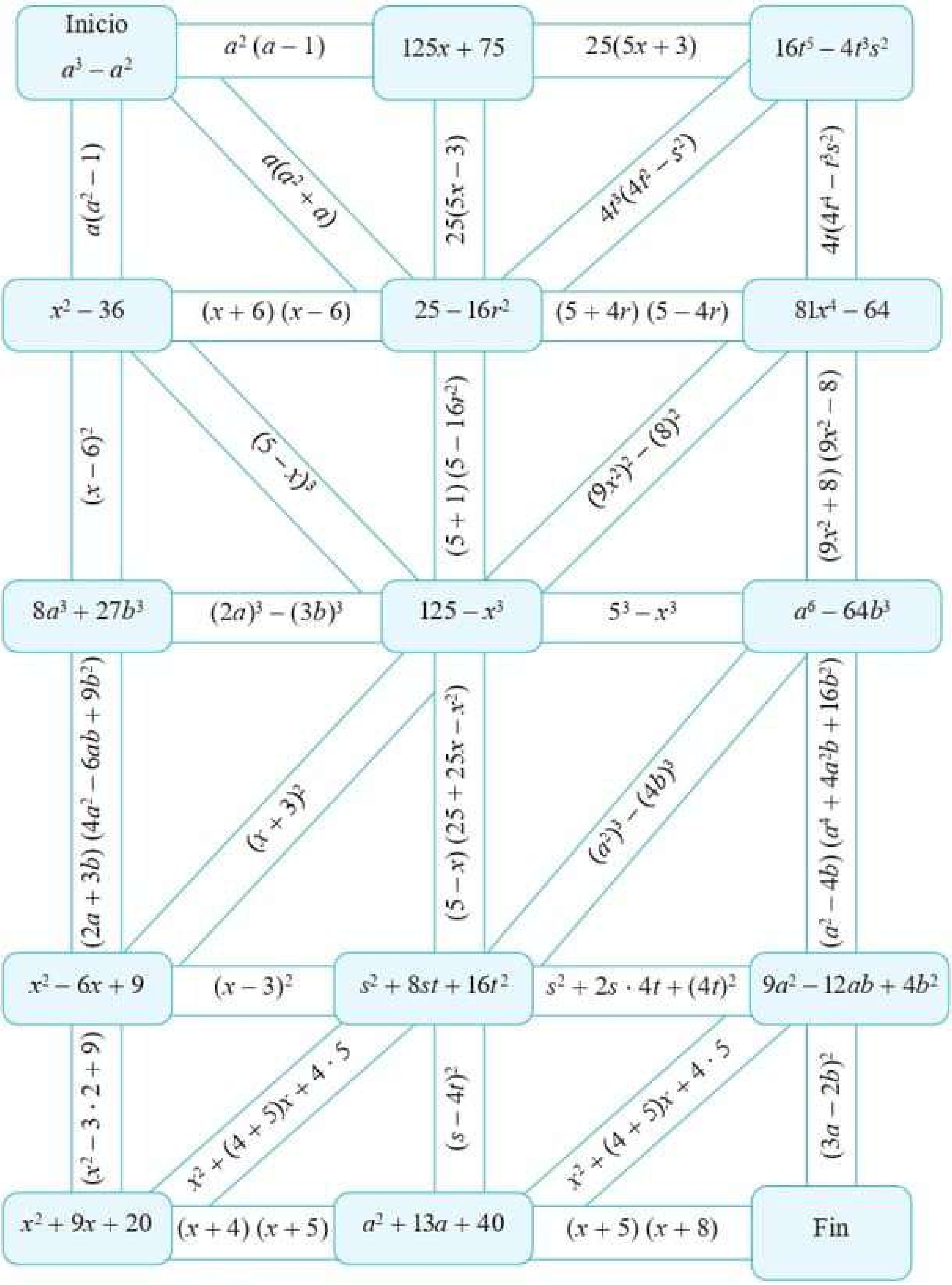


Figura 3.1. Árbol de decisión para factorizar polinomios.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

Actividad formativa 3.2

1. Recorre el laberinto y llega al final. Ubica el inicio, donde encontrarás la primera expresión algebraica por factorizar. Realiza la factorización para avanzar al siguiente recuadro gris y continúa con este proceso hasta llegar al final del laberinto. Elige y colorea la respuesta correcta en cada paso para descubrir el camino correcto. Para realizar esta actividad, apóyate en el árbol de decisiones y en la tabla de modelos de factorización de polinomios.



El empleo del árbol de decisiones y la tabla de los modelos de factorización resultará valioso para la factorización de polinomios, los cuales te serán de gran utilidad en los próximos semestres. Recuerda que tienes al alcance recursos digitales para realizar comprobaciones siempre que sea necesario, por ejemplo, Symbolab, https://es.symbolab.com/. También, puedes apoyarte en la inteligencia artificial, solicitándole que te explique cómo factorizar la expresión algebraica que le proporciones.

Ejemplo formativo 3.1

1. Determina el factor común y factoriza las siguientes expresiones.

   a) $16x^2 - 8xy + 12y^2$

   b) $4a^5b^2 - 20a^3b^3c + 2a^2b^4c^2 - 6ab^6$

   c) $2(x+y) + 4(x+y)^2$

   Resolución

   a) $16x^2 - 8xy + 12y^2$

   Factor común: MCD (16, 8, 12) = 4

   Divisores del 16: 1, 2, 4, 8, 16.
   Divisores del 8: 1, 2, 4, 8.
   Divisores del 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

   Factor común x^2, xy, y^2: no tiene.

   Nota. También puedes determinar el Máximo Común Divisor (MCD) mediante la factorización de números primos.

$$\frac{16x^2}{4} - \frac{8xy}{4} + \frac{12y^2}{4} = 4x^2 - 2xy + 3y^2$$
$$16x^2 - 8xy + 12y^2 = 4(4x^2 - 2xy + 3y^2)$$

   b) $4a^5b^2 - 20a^3b^3c + 2a^2b^4c^2 - 6ab^6$

   Factor común: MCD (4, 20, 2, 6) = 2

   Factor común de a^5b^2, a^3b^3c, $a^2b^4c^2$, ab^6: ab^2

$$\frac{4a^5b^2}{2ab^2} - \frac{20a^3b^3c}{2ab^2} + \frac{2a^2b^4c^2}{2ab^2} - \frac{6ab^6}{2ab^2} = 2a^4 - 10a^2bc + ab^2c^2 - 3b^4$$
$$4a^5b^2 - 20a^3b^3c + 2a^2b^4c^2 - 6ab^6 = 2ab^2(2a^4 - 10a^2bc + ab^2c^2 - 3b^4)$$

   c) $2(x+y) + 4(x+y)^2$

   Factor común: $2(x+y)$

$$\frac{2(x+y)}{2(x+y)} + \frac{4(x+y)^2}{2(x+y)} = 1 + 2(x+y)$$
$$2(x+y) + 4(x+y)^2 = 2(x+y)[1 + 2(x+y)]$$

Actividad formativa 3.3

1. Factoriza las siguientes expresiones.

   a) $3x^2 - 6x^3 + 9x^4$

   b) $7x^2y^3 - 2x^3y^2 + 5x^4y^4$

   c) $a^3 + 5a^4b - a^5b^2$

   d) $b^4 + b^3$

   e) $150x^2 - 50$

   f) $7a^3b^2 - 21a^2b^3 + 14ab^4$

   g) $0.16w^6 + 0.4w4t^2$

   h) $6(a+b)^2 - 3(a+b)$

   i) $\frac{2}{3}z^2w^3 - \frac{2}{3}z^3w^2$

   j) $0.2p^4q^3 - \frac{1}{5}p^2q^2$

   k) $a(r-s) + b(r-s) + c(r-s)$

Ejemplo formativo 3.2

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $16x^2 - 25$ b) $x^3 - 9x$ c) $y^4 - 81$

d) $(p + 2)^2 - q^4$ e) $a^2 - 5$ f) $62^2 - 34^2$

Resolución

a) $16x^2 - 25 = (4x + 5)(4x - 5) = (4x - 5)(4x + 5)$

Raíz cuadrada: $\sqrt{16x^2} = 4x$, $\sqrt{25} = 5$. El orden de los factores puede ser cualquiera.

b) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3)$

Factor común: x Raíz cuadrada: $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{9} = 3$

c) $y^4 - 81 = (y^2 + 9)(y^2 - 9) = (y^2 + 9)(y + 3)(y - 3)$

Raíz cuadrada: $\sqrt{y^4} = y^2$, $\sqrt{81} = 9$ Raíz cuadrada: $\sqrt{y^2} = y$, $\sqrt{9} = 3$

d) $(p + 2)^2 - q^4 = (p + 2 + q^2)(p + 2 - q^2) = (p + q^2 + 2)(p - q^2 + 2)$

Raíz cuadrada: $\sqrt{(p + 2)^2} = p + 2$, $\sqrt{q^4} = q^2$

e) $a^2 - 5 = a^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(a + \sqrt{5}\right)\left(a - \sqrt{5}\right)$

Nota que: $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5}$

f) $62^2 - 34^2 = (62 + 34)(62 - 34) = (96)(28) = 2688$

Nota que: $\sqrt{62^2} = 62$, $\sqrt{34^2} = 34$

Actividad formativa 3.4

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 - 16$ b) $x^2 - y^2$ c) $a^2 - 64$

d) $s^4 - 100$ e) $p^6 - 49$ f) $9q^2 - 36$

g) $4p^2 - 36r^2$ h) $3x^3 - 27xy^2$ i) $121w^2 - x^4$

j) $y^2 - 3$ k) $120^2 - 80^2$ l) $(z + y)^2 - 4x^2$

Ejemplo formativo 3.3

1. Realiza la factorización de las siguientes sumas y diferencias de cubos, según sea cada caso.

a) $x^3 + 1$ b) $27a^3 - b^6$ c) $8x^3 + 64y^9$ d) $81a^6 - 24$

Resolución

a) $x^3 + 1 =$

La raíz cúbica de x^3 es x; la raíz cúbica de 1 es 1, y siguiendo el procedimiento en la tabla de modelos de factorización, obtienes: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

b) $27a^3 - b^6 =$

La raíz cúbica de $27a^3$ es $3a$; la raíz cúbica de b^6 es b^2, y siguiendo el procedimiento en la tabla de modelos de factorización, obtienes:

$$27a^3 - b^6 = (3a - b^2)(9a^2 + 3ab^2 + b^4).$$

c) $8x^3 + 64y^9 =$

La raíz cúbica de $8x^3$ es $2x$; la raíz cúbica de $64y^9$ es $4y^3$, y siguiendo el procedimiento en la tabla de modelos de factorización, obtienes:

$$8x^3 + 64y^9 = (2x + 4y^3)(4x^2 - 8xy^3 + 16y^6).$$

d) Un ejemplo con factor común previo:

$$81a^6 - 24 = 3(27a^6 - 8) = 3(3a^2 - 2)(9a^4 + 6a^2 + 4).$$

Factor común: 3. Después factoriza la diferencia de cubos.

Actividad formativa 3.5

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $8x^3 - 27y^3 =$ b) $s^{12} + 1 =$ c) $125a^6 - 64 =$

d) $\frac{x^3}{27} + \frac{1}{8} =$ e) $24p^3 - 81s^3 =$ f) $(a + b)^3 + (a - b)^3$

Ejemplo formativo 3.4

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $s^2 + 8st + 16t^2$ c) $\frac{x^3}{4} + \frac{x^2y}{3} + \frac{xy^2}{9}$

Resolución

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 \underbrace{- 2 \cdot x \cdot 3}_{-6x} + 9 = (x - 3)^2$

b) $s^2 + 8st + 16t^2 = s^2 \underbrace{+ 2 \cdot s \cdot 4t}_{8st} + 9 = (s + 4t)^2$

c) $\frac{x^3}{4} + \frac{x^2y}{3} + \frac{xy^2}{9} = x\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{4}\right) = x\left(\frac{x^2}{4} \underbrace{+ 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3}}_{\frac{2xy}{6} = \frac{xy}{3}} + \frac{y^2}{9}\right) = x\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$

Primero factoriza por factor común

Ejemplo formativo 3.5

1. Analiza la factorización de los siguientes trinomios de la forma $x^2 + px + q$.

a) $x^2 + 6x + 8$ b) $x^2 + 3x - 10$

Resolución

a) $x^2 + 6x + 8$

- Encuentra dos factores que den el primer término: $x \cdot x$.
- Halla los divisores del tercer término, seleccionando aquellos cuya multiplicación de **8** y su suma de 6, se obtienen (2)(4) y (–2)(–4) que en ambos casos da 8, sin embargo, la opción que al sumarse da 6 es la primera, la factorización es: $(x + 2)(x + 4)$.

b) $x^2 + 3x - 10$

- Encuentra dos factores que den el primer término: $x \cdot x$.
- Halla los divisores del tercer término, seleccionando aquellos cuya multiplicación de –10 y su suma de 3, se obtienen (2)(–5) y (–2)(5) que en ambos casos da –10, la opción que al sumarse da 3 es la segunda, la factorización es: $(x - 2)(x + 5)$.

Ejemplo formativo 3.6

1. Factoriza los siguientes trinomios de la forma $mx^2 + px + q$.

   a) $6x^2 + 11x + 4$ b) $8x^2 - 22x + 5$

   Resolución

   a) $6x^2 + 11x + 4$

   - Identifica los valores m, p y q: $m = 6$, $p = 11$ y $q = 4$
   - Multiplica m y q: $(6)(4) = 24$
   - Busca dos números que multiplicados den $m \cdot q = 24$ y sumados den $p = 11$, los números son 8 y 3, ya que $(8)(3) = 24$ y $8 + 3 = 11$
   - Reescribe el trinomio sustituyendo el término del medio por $8x$ y $3x$
   $$6x^2 + 11x + 4 = 6x^2 + 8x + 3x + 4$$
   - Agrupa los términos por factor común: $(6x^2 + 3x) + (8x + 4)$
   - Obtén el factor común: $3x(2x + 1) + 4(2x + 1)$
   - Factoriza por factor común ya que ambos tienen el término $(2x + 1)$
   $$3x(2x + 1) + 4(2x + 1) = (2x + 1)(3x + 4)$$

   La factorización de $6x^2 + 11x + 4$ es $(2x + 1)(3x + 4)$

   b) $8x^2 - 22x + 5$

   - Identifica los valores m, p y q: $m = 8$, $p = -22$ y $q = 5$
   - Multiplica m y q: $(8)(5) = 40$
   - Buscas dos números que multiplicados den $m \cdot q = 40$ y sumados den $p = -22$, los números son -20 y -2, ya que
   $$(-20)(-2) = 40 \text{ y } -20 - 2 = -22$$
   - Reescribe el trinomio sustituyendo el término del medio por $-20x$ y $-2x$
   $$8x^2 - 22x + 5 = 8x^2 - 20x - 2x + 5$$
   - Agrupa los términos por factor común: $(8x^2 - 20x) + (-2x + 5)$
   - Obtén el factor común: $4x(2x - 5) - 1(2x - 5)$
   - Factoriza por factor común ya que ambos tienen el término $(2x - 5)$
   $$4x(2x - 5) - 1(2x - 5) = (4x - 1)(2x - 5)$$

   La factorización de $8x^2 - 22x + 5$ es $(4x - 1)(2x - 5)$.

Actividad formativa 3.6

1. Factoriza los siguientes trinomios según sea el modelo, puedes apoyarte del árbol de decisión para seleccionar el modelo apropiado.

   a) $x^2 + 4x + 3$ b) $x^2 - 10x + 25$ c) $a^2 + 13a + 40$

   d) $81a^2 - 18a + 1$ e) $x^2 + 3x - 4$ f) $y^2 - 3y - 4$

   g) $\frac{x^2}{9} - 6x^6 + 81x^{10}$ h) $x^2 - 12x + 35$ i) $5x^2 + 11x + 2$

   j) $2x^2y + 12xy + 18y$ k) $6x^2 + 7x - 5$ l) $4x^2 + 6x - 10$

   m) $9a^2 + 6a - 3$ n) $5x^2 - 12x + 4$

Ejemplo formativo 3.7

1. Factoriza por agrupación los siguientes polinomios.

   a) $8x^3 - 8x^2 - 4x + 4$ b) $x^3 - 3x^2 - 4x - 12$ c) $x^3 - 3x^2 - 4x - 12$

   Resolución

   a) $8x^3 - 8x^2 - 4x + 4$

   Agrupa $(8x^3 - 8x^2) - (4x - 4)$

   Factoriza por factor común cada binomio: $8x^2 (x - 1) - 4(x - 1)$

   Vuelve a factorizar por factor común y en el segundo factor simplifica factorizando por factor común: $(x - 1)(8x^2 - 4) = 4(2x^2 - 1)(x - 1)$

   b) $x^3 - 3x^2 - 4x - 12$

   Agrupa $(x^3 - 3x^2) - (4x - 12)$

   Factoriza por factor común cada binomio: $x^2 (x - 3) - 4(x - 3)$

   Vuelve a factorizar por factor común y encuentra en el resultado una diferencia de cuadrados que factorizaste:

   $$(x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$$

   c) $a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1$

   Agrupa $(a^4 + 2a^3 + a^2) + (a + 1)$

   Factoriza el trinomio por factor común: $a^2 (a^2 + 2a + 1) + (a + 1)$

   El trinomio resultante es cuadrado perfecto, por lo que:

   $$a^2 (a^2 + 2a + 1) + (a + 1) = a^2 (a + 1)^2 + (a + 1)$$

   Vuelve a factorizar por factor común:

   $$a^2 (a + 1)^2 + (a + 1) = (a + 1)[a^2 (a + 1) + 1] = (a + 1)(a^3 + a^2 + 1)$$

Actividad formativa 3.7

1. Factoriza las siguientes expresiones.

   a) $a^2 + ab + ax + bx$
   b) $am - bm + an - bn$
   c) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
   d) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
   e) $6m - 9n + 21nx - 14mx$
   f) $4ax^2 - 12axy - x^2 + 3y$
   g) $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$
   h) $a^3 - 3a^2b + a^2 + 3ab^2 - 2ab - b^3 + b^2$

EVALUACIÓN FORMATIVA 3.1

1. Relaciona las columnas con la opción correcta.

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$	( ) Factor común
b) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$	( ) Diferencia de cuadrados
c) $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$	( ) Suma o diferencia de cubos
d) $12x^2 + 3x = 3x (4x + 1)$	( ) Trinomio cuadrado perfecto
e) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = (x^2 + 2)(x + 3)$	( ) Trinomio de la forma $x^2 + px + q$
f) $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$	( ) Trinomio de la forma $mx^2 + px + q$
g) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$	( ) Agrupación

2. En cada uno de los casos siguientes, termina la factorización e identifica el modelo utilizado.

a) $3x^2 - 13x - 10 = (\_\_\_\ x + 2)(x - \_\_\_\ )$ ____________________________

b) $x^2 - 25 = (x \_\_\ \_\_\_)(x - 5)$ ____________________________

c) $\_\_\_^2 - 8x + 15 = (x - \_\_\_)(x - \_\_\_)$ ____________________________

d) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = (x^3 + \_\_\_\ ^2) + (2x + \_\_\_)$ ____________________________

$= x^2 (x + 3) + 2(x + 3)$

$= (x^2 + \_\_\_)(\_\_\_ + 3)$

e) $x^2 + \_\_\_\ x + 25 = (\_\_\_ + 5)^2$ ____________________________

f) $12x^3y^2 + 18x^2y = 6x^2\ \_\_\_\ (2xy + \_\_)$ ____________________________

g) $x^3 + 8 = (x \_\_\ 2)(x^2 - 2x + \_\_)$ ____________________________

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identifiqué correctamente el método de factorización aplicable a un polinomio dado. (M1-C1)			
Expliqué la selección de un método de factorización en función de la forma del polinomio. (M1-C3)			
Empleé notación algebraica precisa para representar y transformar expresiones polinómicas factorizadas. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 3 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Identificó correctamente el método de factorización aplicable a un polinomio dado. (M1-C1)			
Explicó la selección de un método de factorización en función de la forma del polinomio. (M1-C3)			
Empleó notación algebraica precisa para representar y transformar expresiones polinómicas factorizadas. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Fracciones algebraicas

$$\frac{x^2+4x+9}{x-3} \qquad \frac{2s}{s+t} \qquad \frac{3x}{x^2-y}$$

$$\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x+5}{x-1}= \qquad \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}\div\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}=$$

$$\frac{5}{3x-3}+\frac{3x-1}{1-x^2}-\frac{1}{2x+2}=$$

Progresión de aprendizaje 4

Diseña un método sistemático para simplificar y realizar operaciones con fracciones algebraicas, integrando múltiples operaciones.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 4.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. ¿Qué fracción es equivalente a 2/3?

   a) 3/2 b) 4/5 c) 4/6

2. ¿Cuál es la fracción irreducible equivalente a 12/18?

   a) 6/9 b) 4/6 c) 2/3

3. ¿Cuál es el resultado de sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$?

   a) $\frac{13}{12}$ b) $\frac{3}{9}$ c) $\frac{13}{6}$

4. ¿Cuál es el resultado de multiplicar $\frac{3}{10} \times \frac{4}{7}$?

a) $\frac{12}{35}$ b) $\frac{21}{40}$ c) $\frac{6}{35}$

5. ¿Cuál es el resultado de dividir $3/5 \div 2/5$?

a) 5/6 b) 3/2 c) 1/1

6. ¿Cuál es la factorización del trinomio $x^2 - 7x + 10$?

a) $(x + 2)(x - 5)$ b) $(x - 2)(x - 5)$ c) $(x + 10)(x + 1)$

7. ¿Cuál es el resultado de simplificar $\frac{a^6b^4}{a^2b^7}$?

a) $\frac{a^3}{b^3}$ b) a^8b^3 c) $\frac{a^4}{b^3}$

Definición y simplificación de fracciones algebraicas

De los estudios de secundaria conoces las fracciones como el cociente entre dos números en el que al dividendo se le llama numerador y el divisor, que debe ser distinto de 0, recibe el nombre de denominador.

Así, las expresiones $\frac{7}{8}$, $\frac{21}{5}$ y $\frac{3}{4}$ son fracciones numéricas en las que 7, 21 y 3 son los numeradores y 8, 5 y 4 los denominadores. Si consideras ahora expresiones como $\frac{7x - 1}{8x + 3}$ también es una fracción y dado que en este caso el denominador es una expresión algebraica, a este tipo de fracciones se les denomina fracciones algebraicas.

Al igual que en las fracciones numéricas, en las fracciones algebraicas el denominador debe ser distinto de 0 (¿por qué?). Por tanto, en el ejemplo anterior, $8x + 3 \neq 0$, significa que $x \neq -3/8$. En los casos en que solo el numerador sea una expresión algebraica, por ejemplo $\frac{7x - 1}{8}$, no estarás en presencia de una fracción algebraica, ya que de hecho $\frac{7x - 1}{8x + 3} = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}$ es simplemente una expresión algebraica polinomial (un polinomio con coeficientes fraccionarios).

A partir de lo anterior, se puede precisar una definición para las fracciones algebraicas.

Definición de fracción algebraica

Sean A y B expresiones algebraicas con $B \neq 0$. Si en B hay al menos una variable con exponente positivo, entonces el cociente entre A y B, $\frac{A}{B}$, recibe el nombre de fracción algebraica.

Son ejemplos de fracciones algebraicas:

$$\frac{2}{5y - 1} \qquad \frac{x^2 + 4x + 9}{x - 3} \qquad \frac{2s}{s + t} \qquad \frac{3x}{x^2 - y}$$

siempre que la expresión algebraica que está en el denominador sea diferente de 0, es decir, en los casos anteriores, $y \neq 1/5, x \neq 3, s \neq -t, y \neq x^2$. De aquí en adelante, supón siempre que los valores que hacen que los denominadores sean ceros en las fracciones algebraicas están excluidos de sus dominios, es decir, del conjunto de números reales para los cuales está definida la fracción algebraica.

No son fracciones algebraicas.

$$\frac{a + ab + 5}{5} \qquad \frac{x^2 + 4}{x^{-2}} \qquad \frac{3s + 2}{3/2}$$

Para poder simplificar una fracción algebraica que sea cociente de polinomios, se requiere:

1. Factorizar tanto el numerador como el denominador y de ser necesario descomponer en factores.

2. Cancelar factores comunes.
3. Considerar las restricciones de la(s) variable(s), vamos a suponer que en todos los casos se cumple que los denominadores no son cero.

QR 4.1. Simplificar fracciones algebraicas. Video de profejulio. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Para facilitar la comprensión del siguiente ejemplo, escanea el código QR 4.1 y revisa el video que explica paso a paso cómo simplificar fracciones algebraicas.

Ejemplo formativo 4.1

1. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y establece las restricciones sobre las variables.

a) $\dfrac{x^3-5x^2}{x^2-10x+25}$ b) $\dfrac{2a^4-2b^4}{2a^2+4ab+2b^2}$ c) $\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$

d) $\dfrac{m^2+2m-3}{m^2-m}$ e) $\dfrac{n^2+8n-20}{2n^2-3n-2}$ f) $\dfrac{2y^2-4y+2}{2y^3-5+5y^2-2y}$

Resolución

a) $\dfrac{x^3-5x^2}{x^2-10x+25} = \dfrac{x^2(x-5)}{(x-5)^2}$ Factoriza por factor común y factoriza el trinomio

$= \dfrac{x^2\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-5)}$ Expresa el denominador como producto de factores y cancela

$= \dfrac{x^2}{x-5}$, para $x \neq 5$.

b) $$\frac{2a^4-2b^4}{2a^2+4ab+2b^2} = \frac{2(a^4-b^4)}{2(a^2+2ab+b^2)} = \frac{2\left((a^2)^2-(b^2)^2\right)}{2(a+b)^2} = \frac{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{2(a+b)(a+b)}$$

$$= \frac{\cancel{2}(a^2+b^2)(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{2}(a+b)\cancel{(a+b)}} = \frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a+b}, \text{ para } a \neq -b.$$

c) $\dfrac{x^2+x-12}{3x-9} = \dfrac{(x+4)\cancel{(x-3)}}{3\cancel{(x-3)}} = \dfrac{x+4}{3}$, para $x \neq 3$.

d) $\dfrac{m^2+2m-3}{m^2-m} = \dfrac{(m+3)\cancel{(m-1)}}{m\cancel{(m-1)}} = \dfrac{m+3}{m}$, para $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

e) $\dfrac{n^2+8n-20}{2n^2-3n-2} = \dfrac{(n+10)\cancel{(n-2)}}{(2n+1)\cancel{(n-2)}} = \dfrac{n+10}{2n+1}$, para $n \neq -1/2$ y $n \neq 2$.

f) $$\frac{2y^2-4y+2}{2y^3-5+5y^2-2y} = \frac{2(y^2-2y+1)}{(2y^3+5y^2)-(2y+5)} = \frac{2(y-1)^2}{y^2(2y+5)-(2y+5)} = \frac{2(y-1)^2}{(2y+5)(y^2-1)}$$

$$= \frac{2(y-1)\cancel{(y-1)}}{(2y+5)(y+1)\cancel{(y-1)}} = \frac{2(y-1)}{(2y+5)(y+1)}, \text{ para } y \neq -5/2 \text{ y } y \neq \pm 1.$$

Signos en una fracción algebraica

En una fracción algebraica se deben considerar los signos del numerador, del denominador y de la fracción como un todo, ya que estos determinan el signo global de la expresión. Cambiar el signo del numerador y del denominador simultáneamente no modifica el signo de la fracción, ya que el efecto de dos signos negativos se anula entre sí. Si el numerador y el denominador son polinomios, para cambiar el signo del numerador o del denominador hay que cambiarle el signo a cada término del polinomio.

Por ejemplo, $\dfrac{x-5}{3-x} = \dfrac{x-5}{-(x-3)} = \dfrac{-(5-x)}{3-x} = \dfrac{-(5-x)}{-(x-3)} = \dfrac{5-x}{x-3}$.

De igual forma, para simplificar la fracción $\frac{16-4x^2}{x^2-4x+4}$, debes tener en cuenta el tema de los signos:

$$\frac{16-4x^2}{x^2-4x+4} = \frac{4(4-x^2)}{(x-2)^2} = \frac{4[-(x^2-4)]}{(x-2)^2} = \frac{-4(x^2-4)}{(x-2)^2} = -\frac{4(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}}$$

$$= -\frac{4(x+2)}{x-2} = \frac{4(x+2)}{2-x}, \text{ para } x \neq 2.$$

Antes de simplificar… ¡lee esto!

- Observa cuidadosamente los signos al simplificar.
- Recuerda que, al cambiar el signo, todo el polinomio es afectado, no solo el primer término.
- Cuando simplifiques, puedes extraer el signo negativo como factor común para facilitar el análisis.

Actividad formativa 4.1

1. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{6-4x}{4x^2-9}$ b) $\dfrac{n^4-81}{n^2-6n+9}$ c) $\dfrac{x^2-8x-20}{100x-x^3}$

d) $\dfrac{9a^2-6ab+b^2}{9a^2-b^2}$ e) $\dfrac{(x-a)(c+2)+b(c+2)}{c^2+4c+4}$ f) $\dfrac{a^3-2a^2+a-2}{4a^2-16}$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Como sabes, las fracciones numéricas se multiplican efectuando el producto de los numeradores, dividido por el producto de los denominadores, obteniendo así una nueva fracción numérica. Siempre que sea posible se deben simplificar, por ejemplo:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 8}=\frac{15}{32} \quad \text{y} \quad \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 5\cdot 3}{5\cdot 9\cdot 7}=\frac{2}{21}.$$

Para dividir dos fracciones numéricas, sabes que se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor. Por ejemplo, $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$.

Análogamente se procede en la multiplicación y división de fracciones algebraicas. Si se multiplican dos o más fracciones algebraicas se obtiene una fracción cuyo resultado es el producto de los numeradores, dividido por el producto de los denominadores de las fracciones dadas, es decir:

Multiplicación de fracciones algebraicas

Sean las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ con $B\neq 0$ y $D\neq 0$, entonces

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

De igual manera a como se hace con la división de fracciones numéricas se procede en la división de las fracciones algebraicas, es decir, se multiplica la fracción dividendo por la fracción que es recíproca del divisor.

División de fracciones algebraicas

Sean las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ con $B\neq 0$, $C\neq 0$ y $D\neq 0$, entonces

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

Con el objetivo de facilitar los cálculos y dar los resultados como una fracción simplificada, por lo general, cuando se realiza una multiplicación de fracciones algebraicas es más conveniente factorizar primero los numeradores y denominadores de las fracciones dadas y simplificar cada una de ellas, antes de efectuar la multiplicación.

Por otro lado, cuando aparecen multiplicaciones y divisiones combinadas de fracciones algebraicas, estas se efectúan en el orden en que se presentan a menos que se especifique otro orden.

Antes de comenzar con el siguiente ejemplo, escanea los códigos QR 4.2 y QR 4.3 para ver una explicación detallada sobre cómo se multiplican o se dividen las fracciones algebraicas.

QR 4.2. Multiplicación de fracciones algebraicas. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

QR 4.3. División de fracciones algebraicas. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 4.2

1. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x+5}{x-4}$ b) $\dfrac{15a^2bc}{9}\div\dfrac{5abc}{3}$ c) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+6x+9}\cdot\dfrac{x^2-9}{5x-15}$

d) $\dfrac{s^3-125}{3s^3-15s^2}\div\dfrac{s^2+5s+25}{9s^2}$ e) $\dfrac{y^2-14y+49-9x^2}{(3x-7)(y+3x-7)}\div(-42x^2-18x^3+6x^2y)$

Resolución

a) $\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x+5}{x-4}=\dfrac{x(x+5)}{(x-1)(x-4)}$ Multiplica las fracciones algebraicas

$=\dfrac{x^2+5x}{x^2-5x+4}$ Efectúa las multiplicaciones indicadas

b) $\dfrac{15a^2bc}{9}\div\dfrac{5abc}{3}=\dfrac{15a^2bc}{9}\cdot\dfrac{3}{5abc}$ Expresa la división como un producto

$=\dfrac{(15a^2bc)(3)}{(9)(5abc)}$ Multiplica las fracciones

$=\dfrac{45a^2bc}{45abc}$ Efectúa la multiplicación y simplifica

$=a$

c) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+6x+9}\cdot\dfrac{x^2-9}{5x-15}=\dfrac{x(x+3)}{(x+3)^2}\cdot\dfrac{(x-3)(x+3)}{5(x-3)}=\dfrac{x}{x+3}\cdot\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{x(x+3)}{(x+3)5}=\dfrac{x}{5}$

d) $\dfrac{s^3-125}{3s^3-15s^2}\div\dfrac{s^2+5s+25}{9s^2}=\dfrac{s^3-125}{3s^3-15s^2}\cdot\dfrac{9s^2}{s^2+5s+25}=\dfrac{(s-5)(s^2+5s+25)}{3s^2(s-5)}\cdot\dfrac{9s^2}{s^2+5s+25}$

$=\dfrac{s^2+5s+25}{3s^2}\cdot\dfrac{9s^2}{s^2+5s+25}=\dfrac{(s^2+5s+25)9s^2}{3s^2(s^2+5s+25)}=3$

e) $\dfrac{y^2-14y+49-9x^2}{(3x-7)(y+3x-7)}\div(-42x^2-18x^3+6x^2y)=\dfrac{y^2-14y+49-9x^2}{(3x-7)(y+3x-7)}\cdot\dfrac{1}{-42x^2-18x^3+6x^2y}$

$=\dfrac{(y-7)^2-9x^2}{(3x-7)(y+3x-7)}\cdot\dfrac{1}{6x^2(-7-3x+y)}=\dfrac{(y-7+3x)(y-7-3x)}{(3x-7)(y+3x-7)}\cdot\dfrac{1}{6x^2(-7-3x+y)}=$

$=\dfrac{y-7-3x}{3x-7}\cdot\dfrac{1}{6x^2(-7-3x+y)}=\dfrac{y-7-3x}{(3x-7)(6x^2)(-7-3x+y)}=\dfrac{1}{6x^2(3x-7)}$

Actividad formativa 4.2

1. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $\dfrac{a+1}{bc}\cdot\dfrac{3b^2c}{3a^2-3}$ b) $\dfrac{ax+x}{4+2x}\div\dfrac{ab+b}{x^2-4}$ c) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}\div\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$

d) $\dfrac{a^2-3a}{a^2-2a-3}\cdot\dfrac{3a^2+3a}{3a^2}$ e) $\dfrac{2s}{s^2+2s-3s}\cdot\dfrac{s^2-49}{2s-14}$ f) $\dfrac{x^2-4}{3x+9}\div\dfrac{x^2+2x-8}{2x+6}$

g) $\dfrac{3zm+nz-6m-2n}{(z-2)(z+2-4b)}\div\dfrac{9m^2-n^2}{3m^2+14mn-5n^2}$ h) $\dfrac{x^2-5x+6}{3x-15}\cdot\dfrac{6x}{x^2-x-30}\div\dfrac{2x^2-4x}{x^2-25}$

i) $\dfrac{x^2-3xy}{x^2-4xy+3y^2}\div\dfrac{3xy}{y(x-y)}$ j) $\dfrac{8x^3+y^3}{3x^2+4xy+y^2}\cdot\dfrac{x+y}{4x^2-y^2}\cdot\dfrac{6x^2-xy-y^2}{4x^2-2xy+y^2}$

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

La adición y sustracción de fracciones algebraicas se hace de forma muy similar a la que ya conoces de las fracciones numéricas, analizando si hay denominadores comunes o cuando hay que buscar el mínimo común múltiplo (mcm) para realizar la operación correspondiente. Por ejemplo:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\qquad \frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{12+5}{20}=\frac{17}{20},\qquad \frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\frac{3}{4}=\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{2}{3^2}-\frac{3}{2^2}=\frac{30+8-27}{36}=\frac{11}{36}$$

siendo en la última operación $36 = 2^2 \cdot 3^2$ el mcm de los tres denominadores.

Análogamente, se presentan, para las fracciones algebraicas, tres situaciones:

1. Si dos o más fracciones algebraicas tienen el mismo denominador la suma o diferencia es la fracción algebraica que tiene como numerador la suma o diferencia de los numeradores y como denominador, el denominador común a todas las fracciones, es decir, si

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{B}\; B\neq 0, \text{ entonces } \frac{A}{B}\pm\frac{C}{B}=\frac{A\pm C}{B}$$

Por ejemplo:

$$\frac{8x^2+3x-2}{2x+6}-\frac{8x^2+2x-5}{2x+6}=\frac{8x^2+3x-2-(8x^2+2x-5)}{2x+6}=\frac{x+3}{2(x+3)}=\frac{1}{2}$$

2. Si dos o más fracciones algebraicas tienen denominadores que no tienen ningún factor común, entonces la suma o diferencia es la fracción algebraica que tiene como numerador la suma algebraica del producto de cada numerador por los denominadores de las demás fracciones y como denominador el producto de los denominadores de las fracciones. En el caso de tres fracciones, si $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}\pm\frac{E}{F}$, $B, D, F\neq 0$, sin factores comunes,entoces $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}\pm\frac{E}{F}=\frac{ADF\pm CBF\pm EBD}{BDF}$

Por ejemplo,

$$\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x+3}=\frac{x(x+3)-(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x^2+3x-x^2+1}{(x+1)(x+3)}=\frac{3x+1}{(x+1)(x+3)}$$

O bien

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}&=\frac{2(x+2)(x-2)+x^2(x-2)-(x-1)\,x(x+2)}{x(x+2)(x-2)}\\&=\frac{2(x^2-4)+x^3-2x^2-x(x^2+x-2)}{x(x^2-4)}\\&=\frac{2x^2-8+x^3-2x^2-x^3-x^2+2x}{x(x^2-4)}\\&=\frac{-3x^2+2x-8}{x(x^2-4)}\end{aligned}$$

3. De modo general cuando se trata de adicionar o sustraer fracciones algebraicas que no tienen denominador común, pero tienen factores comunes, se procede análogamente como en las fracciones numéricas, es decir se busca el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores, que es denominado mínimo común denominador y que se compone del producto de todos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Si, por ejemplo, quieres restar las dos fracciones, $\frac{x}{x^2+2x-15}$ y $\frac{x-3}{x+5}$, debes buscar si existen factores comunes entre los dos denominadores.

Como $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$, el mínimo común denominador entre los dos denominadores es $(x-3)(x+5)$, por tanto, este será el denominador común en la resta de estas dos fracciones.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+2x-15}-\frac{x-3}{x+5}&=\frac{x}{(x+5)(x-3)}-\frac{x-3}{x+5}=\frac{x-(x-3)^2}{(x+5)(x-3)}\\&=\frac{x-x^2+6x-9}{(x+5)(x-3)}=\frac{-x^2+7x-9}{(x+5)(x-3)}\end{aligned}$$

Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas:

- Simplifica las fracciones donde sea posible.
- Determina el mínimo común denominador de las fracciones resultantes, como el denominador común en la operación a realizar.
- Divide el denominador común entre el denominador de cada fracción y multiplica el resultado por el numerador correspondiente.
- Realiza la suma algebraica de los numeradores.
- Factoriza el resultado del numerador, siempre que sea posible, para simplificar la fracción resultante.

Consulta el código QR 4.4 antes de iniciar el siguiente ejemplo; en él se explica con detalle cómo sumar y restar fracciones algebraicas.

QR 4.4. Suma y resta de fracciones algebraicas. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 4.3

1. Realiza las siguientes operaciones de fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+3}{x^2-x-6}-\dfrac{x+5}{x^2+2x-15}$ b) $\dfrac{a}{a^2-2a+1}+\dfrac{1}{a-1}$ c) $\dfrac{6x+9}{8x^3+27}-\dfrac{2}{4x^2-6x+9}$

d) $\dfrac{5}{3x-3}+\dfrac{3x-1}{1-x^2}-\dfrac{1}{2x+2}$ e) $\dfrac{x^2-16}{2x^2-8x}\cdot\dfrac{2x^2}{x^2+3x-4}-\dfrac{2}{x^2-1}$

Resolución

a) $$\frac{x+3}{x^2-x-6}-\frac{x+5}{x^2+2x-15}=\frac{x+3}{(x+2)(x-3)}-\frac{x+5}{(x+5)(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)(x-3)}-\frac{1}{x-3}$$
$$=\frac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$$

b) $$\frac{a}{a^2-2a+1}+\frac{1}{a-1}=\frac{a}{(a-1)^2}+\frac{1}{a-1}=\frac{a+(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{2a-1}{(a-1)^2}$$

c) $$\frac{6x+9}{8x^3+27}-\frac{2}{4x^2-6x+9}=\frac{6x+9}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}-\frac{2}{4x^2-6x+9}=\frac{6x+9-2(2x+3)}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}$$
$$=\frac{3(2x+3)-2(2x+3)}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}=\frac{2x+3}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}=\frac{1}{4x^2-6x+9}$$

d) $$\frac{5}{3x-3}+\frac{3x-1}{1-x^2}-\frac{1}{2x+2}=\frac{5}{3(x-1)}+\frac{3x-1}{-(x^2-1)}-\frac{1}{2(x+1)}=\frac{5}{3(x-1)}-\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)}$$
$$=\frac{5\cdot 2(x+1)-3\cdot 2\cdot(3x-1)-3(x-1)}{6(x-1)(x+1)}=\frac{10x+10-18x+6-3x+3}{6(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{-11x+19}{6(x-1)(x+1)}$$

e) $$\frac{x^2-16}{2x^2-8x}\cdot\frac{2x^2}{x^2+3x-4}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{(x-4)(x+4)}{2x(x-4)}\cdot\frac{2x^2}{(x+4)(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x+4}{2x}\cdot\frac{2x^2}{(x+4)(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x+4)2x^2}{2x(x+4)(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x-1}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}$$

Actividad formativa 4.3

1. Realiza las siguientes operaciones de fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{2a-21}{a^2}$

b) $\dfrac{s^2}{s+4}-\dfrac{3s^2}{4s-1}$

c) $\dfrac{2x+1}{x+1}-\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x}{x+1}$

d) $\dfrac{2x-1}{x^2-9}-\dfrac{3x+2}{(x+3)(x-3)}$

e) $\dfrac{3x-2}{6x}-\dfrac{x^2+4}{2x^3}$

f) $\dfrac{a-2}{a-3}+\dfrac{a-3}{a-2}-\dfrac{1}{a^2-5a+6}$

g) $\dfrac{4y+2}{2y^2+7y+3}+\dfrac{3y}{y^2-9}$

h) $\dfrac{1}{a^2-ab}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}$

i) $\dfrac{t^2+4t}{t^2+8t+16}+\dfrac{5t+24}{t+4}$

j) $\dfrac{8x+14}{x^2+2x-8}-\dfrac{10x}{2x^2-4x}$

k) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2}\div\dfrac{x-2y}{x^2+2xy}-\dfrac{2x^2y-4x}{2(xy-2)}$

En el video vinculado al código QR 4.5 podrás conocer qué son las fracciones algebraicas, así como los procedimientos para simplificarlas, sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas."

QR 4.5. Fracciones algebraicas. Video de Math mobile. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Evaluación formativa 4.1

1. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{h^2-9}{k^7-9k^6}\cdot\dfrac{hk-9h}{hk+3k}\div\dfrac{h^3-3h^2}{k^6}$

b) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+3xy+2y^2}\cdot\dfrac{x^2-xy-6y^2}{x^2-2xy-3y^2}\div\dfrac{x^2-xy+y^2}{2x^2+2xy}$

c) $\dfrac{27x^3-y^3}{3x^2-4xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{9x^2+3xy+y^2}\div\dfrac{x^2-9y^2}{xy+3y^2}$

d) $\dfrac{2x}{x^2-2xy-3y^2}-\dfrac{y}{3x^2+4xy+y^2}+\dfrac{2x-y}{3x^2-8xy-3y^2}$

e) $\dfrac{3x}{2x^2+3xy-2y^2}+\dfrac{y}{x^2-4y^2}-\dfrac{2x+y}{2x^2-5xy+2y^2}$

2. Simplifica la expresión $\left[\dfrac{6}{x+3}+\dfrac{7}{(x+3)^2}+\dfrac{3}{4x-5}\right](x+3)^2(4x-5)$.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Realicé operaciones con fracciones algebraicas. (M1-C1)			
Identifiqué el tipo de factorización de expresiones algebraicas en una fracción algebraica. (M1-C2)			
Usé los tipos de factorización para simplificar expresiones algebraicas. (M1-C3)			
Utilicé el lenguaje matemático de forma rigurosa y precisa para describir el procedimiento de las operaciones con fracciones algebraicas. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 4 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Realizó operaciones con fracciones algebraicas. (M1-C1)			
Identificó el tipo de factorización de expresiones algebraicas en una fracción algebraica. (M1-C2)			
Usó los tipos de factorización para simplificar expresiones algebraicas. (M1-C3)			
Utilizó el lenguaje matemático de forma rigurosa y precisa para describir el procedimiento de las operaciones con fracciones algebraicas. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Inecuaciones lineales de una variable

$$ax + b < 0, \qquad ax + b \leq 0, \qquad ax + b > 0 \qquad \text{o} \qquad ax + b \geq 0$$

Progresión de aprendizaje 5

Compara diferentes métodos de resolución de inecuaciones lineales, incluyendo aquellas con valor absoluto, y crea un modelo gráfico para representar el conjunto solución de sistemas de inecuaciones lineales, en la solución de problemas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 5.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. Dada la ecuación $5x - 3 = 7$, ¿cuál es el valor de x?

   a) -2 b) 1 c) 2

2. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$?

   a) $x = 1, x = 4$ b) $x = 2, x = 3$ c) $x = -6, x = 1$

3. ¿Cuál de los siguientes intervalos es cerrado?

   a) $(3, 7)$ b) $[3, 7]$ c) $[3, 7)$

4. ¿Cuál de los siguientes intervalos describe el conjunto de números reales x tales que $-2 \leq x < 3$?

   a) $[-2, 3]$ b) $(-2, 3)$ c) $[-2, 3)$

Inecuaciones lineales de una variable

Un caso particular de las desigualdades, son aquellas en las que aparecen variables y se denominan inecuaciones. **Una inecuación lineal de una variable** es una desigualdad algebraica en la que aparece una sola variable con exponente uno. Se puede expresar en una de las siguientes formas:

¿Sabías qué?

La definición etimológica de "inecuación" proviene del latín, donde "in-" significa "no" o "sin" y "aequatio" se refiere a "igualación" o "repartición". Por lo tanto, una inecuación se entiende como una desigualdad o una no-igualdad algebraica.

$$ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b > 0 \quad \text{o} \quad ax + b \geq 0$$

Son ejemplos de inecuaciones: $2x + 1 \leq 9$, $\frac{x}{2} - 3.5 > 0$, $5x \geq 3$.

Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la variable que hacen que se cumpla la desigualdad y se les llama soluciones de la inecuación.

La inecuación lineal $x + 1 \leq 6$ tiene como solución cualquier número real menor o igual a 5, es decir $(-\infty, 5]$. En efecto, si sustituimos x por 5, se obtiene la desigualdad válida $6 = 6$. Cualquier otro número real $x \leq 5$, por ejemplo, para $x = 4$, $x + 1 = 4 + 1 = 5 < 6$, luego, también es solución de la inecuación. Para $x > 5$ no se cumple la desigualdad, por ejemplo, para $x = 6$, $x + 1 = 6 + 1 = 7 > 6$. Todos los números reales que sean soluciones de una desigualdad forman su conjunto solución, en este caso, el intervalo $(-\infty, 5]$.

Si dos desigualdades tienen el mismo conjunto solución, se consideran equivalentes. Al igual que en las ecuaciones, resolver una inecuación consiste en aplicar transformaciones equivalentes, utilizando las propiedades de las desigualdades, hasta obtener una inecuación con la variable despejada, como puedes repasar en el video del código QR 5.1.

QR 5.1. Propiedades de las desigualdades. Video de Coronado GED Academy. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 5.1

1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales.

   a) $8x + 11 < 3x - 9$ b) $1 - \frac{3x}{4} \leq 7$

   Resolución

   a) $8x + 11 < 3x - 9$

   $8x - 3x < -9 - 11$ (resta $3x + 11$ en ambos miembros, para trasponer términos)

   $5x < -20$ (realiza las operaciones indicadas)

   $x < -20/5$ (divide entre 5, por la propiedad de división por una constante se mantiene el sentido de la desigualdad, al ser $5 > 0$)

   $x < -4$

   El conjunto solución es, por tanto, el formado por todos los números reales estrictamente menores que -4, es decir el intervalo abierto $(-\infty, -4)$. Gráficamente se representa por:

   b) $1 - \frac{3x}{4} \leq 7$

   $-\frac{3x}{4} \leq 6$ (resta 1 en ambos miembros)

$$x \geq \left(-\frac{4}{3}\right)6$$

(para despejar x, multiplica en ambos miembros por $-4/3$. Dado que $-4/3 < 0$, por la propiedad de división por una constante, cambia el sentido de la desigualdad).

$$x \geq -8$$

El conjunto solución es, por tanto, el formado por todos los números reales pertenecientes al intervalo $[-8, +\infty)$. En forma gráfica: 

Como habrás podido observar en el último ejemplo, cuando la variable aparece multiplicada o dividida por un número negativo, al pasar este número al otro miembro de la desigualdad, dividiendo o multiplicando para despejar la variable, se invierte el sentido de la desigualdad. Ello es válido cualquiera sea la desigualdad que se considere en la inecuación ($<, >, \leq, \geq$).

Comprobar el resultado obtenido al resolver una inecuación no es tan sencillo como en el caso de las ecuaciones ya que, por lo general, hay infinitos valores hallados para la variable que habría que sustituir en la inecuación original. Sin embargo, se pueden seleccionar algunos valores particulares, representativos para la variable, que permitan apreciar la validez del conjunto solución encontrado.

En el Ejemplo formativo 5.1 a, si seleccionas $x = -5$ como elemento del conjunto solución encontrado y sustituyes en la inecuación original, obtienes $8(-5) + 11 = -29 < 3(-5) - 9 = -24$. Si por el contrario seleccionas $x = 1$, que no pertenece al conjunto solución, no se cumple la desigualdad de la inecuación original.

En el Ejemplo formativo 5.1 b, si seleccionas $x = -1 \in [-8, +\infty)$, se obtiene en la inecuación original la desigualdad válida $7/4 < 7$. Si, por el contrario, se sustituye por $x = -10$, que no está en el conjunto solución, se obtiene $34/4 = 8.5$ que no es menor que 7.

Ejemplo formativo 5.2

1. Resuelve la inecuación lineal $\frac{3}{5} + \frac{x}{2} \geq \frac{3x}{4} - \frac{9}{10}$.

Resolución

Como hay denominadores, para cancelarlos calcula el mcm $(5, 2, 4, 10) = 20$.

$$\frac{3}{5} + \frac{x}{2} \geq \frac{3x}{4} - \frac{9}{10}$$

$12 + 10x \geq 15x - 18$ (multiplica por el mcm en ambos miembros)

$10x - 15x \geq -18 - 12$ (traspón términos para despejar la variable)

$-5x \geq -30$ (reduce términos semejantes)

$x \leq \frac{-30}{-5}$ (al dividir entre -5 cambia el sentido de la desigualdad)

$x \leq 6$

El conjunto solución es $(-\infty, 6]$. Haz la representación gráfica.

Si $x = 6$, se tiene MI: $\frac{3}{5} + \frac{6}{2} = \frac{3}{5} + 3 = \frac{18}{5}$ y MD: $\frac{3(6)}{4} - \frac{9}{10} = \frac{18}{4} - \frac{9}{10} = \frac{90}{20} - \frac{18}{20} = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}$

Para $x < 6$, por ejemplo, $x = 5$, se tiene MI: $\frac{3}{5} + \frac{5}{2} = \frac{6}{10} + \frac{25}{10} = \frac{31}{10} = 3.1$ y

MD: $\frac{3(5)}{4} - \frac{9}{10} = \frac{75}{20} - \frac{18}{20} = \frac{57}{20} = 2.85$

Como $3.1 > 2.85$ comprobamos que para $x = 5$ se cumple la desigualdad $\geq$.

Para $x > 6$, por ejemplo, $x = 10$, MI: $\frac{3}{5} + \frac{10}{2} = \frac{3}{5} + 5 = \frac{28}{5}$ y

MD: $\frac{3(10)}{4} - \frac{9}{10} = \frac{15}{2} - \frac{9}{10} = \frac{75}{10} - \frac{9}{10} = \frac{66}{10} = \frac{33}{5}$.

Como $28/5 < 33/5$, para $x = 10$ no se cumple la desigualdad $\geq$ de la inecuación original.

Insistimos en que lo realizado anteriormente **no es una comprobación** rigurosa del resultado alcanzado, solo permite apreciar la validez del conjunto solución encontrado.

Actividad formativa 5.1

1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales.

a) $y \geq 6 - y$ b) $x - 6 \geq 18 - 7x$ c) $6s + 3 \leq 2s + 5$

d) $5(x - 4) + 6 \leq 5 - x$ e) $0.4x + 0.1 > 2.1 - 0.1x$ f) $5(2 - 3x) > 3(2 - 3x)$

g) $x + \frac{3}{2} > \frac{x}{2} - 1$ h) $\frac{y + 3}{4} - 2 \geq \frac{y - 1}{2}$ i) $x + \frac{3}{4} < \frac{5x - 2}{3} + 1$

Inecuaciones lineales dobles de una variable

En ocasiones, cuando tenemos dos inecuaciones que tienen una misma expresión con la variable en ambos miembros, es conveniente escribirlas como una **inecuación doble o simultánea**, como es el caso de $-15 \leq 2x + 5$ y $2x + 5 < 19$, que podemos escribirla como $-15 \leq 2x + 5 < 19$ y resolver de una vez las dos inecuaciones.

En la inecuación doble $-15 \leq 2x + 5 < 19$ podemos restar en los tres miembros 5 y se obtiene

$$-15 - 5 \leq 2x + 5 - 5 < 19 - 5$$

$$-20 \leq 2x < 14$$

A continuación, se divide entre 2 en los tres miembros

$$-10 \leq x < 7$$

El conjunto solución está dado por el intervalo $[-10, 7)$ cuya representación gráfica es

Si $x = 0$, que pertenece al intervalo $[-10, 7)$, se cumple la desigualdad doble $-15 \leq 5 < 19$.

Pero si, por ejemplo, $x = 8$ o $x = -12$, que no pertenecen al intervalo $[-10, 7)$, no se cumple la desigualdad doble:

Para $x = 8$, $-15 \leq 2(8) + 5 = 21$, pero 21 no es menor que 19.

En el caso $x = -12$, -15 no es menor o igual que $2(-12) + 5 = -19$, aunque sí se cumple en la otra parte de la desigualdad que $2(-12) + 5 = -19 < 19$.

No siempre se pueden resolver simultáneamente las dos desigualdades en una inecuación doble. En ese caso, se resuelven por separado y hay que determinar de las soluciones encontradas por separado, las que satisfacen la inecuación doble (ser solución a la vez de las dos desigualdades).

Ejemplo formativo 5.3

1. Resuelve las siguientes inecuaciones dobles.

a) $7x + 16 > 3x + 12 \geq 5x + 3$ b) $x + 5 \leq 4x - 1 \leq 5x - 1$

Resolución

a) $7x + 16 > 3x + 12 \geq 5x + 3$

Para determinar el conjunto solución de la inecuación doble, primero resuelve por separado cada una de ellas aplicando las propiedades conocidas.

$$7x + 16 > 3x + 12$$
$$7x - 3x > 12 - 16$$
$$4x > -4$$
$$x > \frac{-4}{4}$$
$$x > -1$$

Luego, el conjunto solución es $(-1, +\infty)$, gráficamente

$$3x + 12 \geq 5x + 3$$
$$3x - 5x \geq 3 - 12$$
$$-2x \geq -9$$
$$x \leq \frac{-9}{-2}$$
$$x \leq \frac{9}{2}$$

Luego, el conjunto solución es $(+\infty, 9/2]$, gráficamente

El conjunto solución de la inecuación doble se forma con los números reales que están en los dos conjuntos solución a la vez, es decir en su intersección, por tanto, los números reales estrictamente mayores que -1 y menores o igual que $9/2$, es decir el intervalo semiabierto $(-1, 9/2]$. Gráficamente

b) $x + 5 \leq 4x - 1 \leq 5x - 1$

$x + 5 \leq 4x - 1$	separa la inecuación doble en dos	$4x - 1 \leq 5x - 1$
$x - 4x \leq -5 - 1$	traspón términos para despejar x	$-5x + 4x \leq -1 + 1$
$-3x \leq -6$	reduce términos semejantes	$-x \leq 0$
$x \geq 2$	divide por una constante negativa	$x \geq 0$
Conjunto solución: $[2, +\infty)$		Conjunto solución: $[0, +\infty)$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación doble es la intersección de los dos conjuntos $[0, +\infty)$ y $[2, +\infty)$, es decir $[2, +\infty)$. Gráficamente se representa por la zona doblemente rayada en

Actividad formativa 5.2

1. Resuelve las siguientes inecuaciones dobles.

a) $-4 < 3x + 5 \leq 8$ b) $3 > 2x - 8 > -9$ c) $1 \leq \frac{7-x}{4} \leq 3$

d) $5 \geq \frac{5-x}{3} \geq 3$ e) $-2x + 3 \leq 4x + 1 < 2x + 9$ f) $3x + 2 \geq 2 - 4x \geq 5x - 3$

g) $5x - 2 \leq 10x + 8 \leq 2x - 8$ h) $0 < 2 - \frac{3y}{4} \leq \frac{1}{2}$

i) $\frac{2x-3}{4} + 6 \geq 2 > \frac{4x}{3}$ j) $r^2 - 2r < r^2 + 2r - 3 < (r-3)(r-2)$

Inecuaciones lineales de una variable con valor absoluto

Una inecuación lineal con valor absoluto es aquella inecuación que incluye, al menos, una expresión con valor absoluto o módulo que contiene a la variable. Para resolverlas, por tanto, hay que trabajar con estos dos conceptos y la forma de proceder con ambos.

Son ejemplos de inecuaciones lineales con valor absoluto las siguientes:

$$|2x - 3| < 5, \quad |x - 1| > 2x \quad \text{y} \quad |2x - 1| \leq 3 - x.$$

Como conoces, por definición de valor absoluto $|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Por tanto, para $k > 0$, se cumplen las siguientes reglas:

R_1: si $|x| \leq k$ entonces $x \leq k$ o $-x \leq k$, es decir $x \geq -k$ (dividiendo por -1). De ahí, $-k \leq x \leq k$

R_2: si $|x| \geq k$ entonces $x \geq k$ o $-x \geq k$, es decir $x \leq -k$ (dividiendo por -1). De ahí, $x \leq -k$ o $x \geq k$.

Lo anterior es válido también si se sustituye $\leq$ por $<$ (respectivamente $\geq$ por $>$) y estas reglas se utilizan en la solución de inecuaciones que contienen valor absoluto.

Considera, por ejemplo, resolver la inecuación $|2x - 3| < 5$. De acuerdo con lo anterior, por la regla R_1, la expresión que está dentro de los símbolos del valor absoluto cumple $-5 < 2x - 3 < 5$ y tienes, por tanto, una inecuación doble que se resuelve aplicando las propiedades conocidas, hasta despejar x.

$$-5 < 2x - 3 < 5$$

$$-5 + 3 < 2x < 5 + 3$$

$$-2 < 2x < 8$$

$$-1 < x < 4$$

El conjunto solución de la inecuación $|2x - 3| < 5$ es el intervalo $(-1, 4)$.

Ejemplo formativo 5.4

1. Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto.

   a) $|2x - 3| \geq 5$ b) $|2x - 1| \leq 3 - x$

   Resolución

   a) $|2x - 3| \geq 5$

   Considera la inecuación $|2x - 3| \geq 5$. En este caso, la expresión dentro del valor absoluto es, por R_2, tal que $2x - 3 \geq 5$ o $2x - 3 \leq -5$.

   Resuelve cada inecuación obtenida:

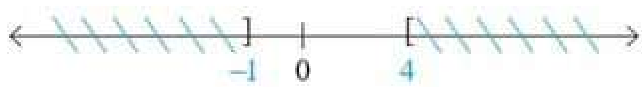
$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geq 5 \\ 2x &\geq 5 + 3 \\ 2x &\geq 8 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

   Conjunto solución $[4, +\infty)$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\leq -5 \\ 2x &\leq -5 + 3 \\ 2x &\leq -2 \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

   Conjunto solución $(-\infty, -1]$

   Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $|2x - 3| \geq 5$ está dado por los números reales menores o iguales que -1 o por los números reales mayores o iguales que 4, es decir la unión de ambos conjuntos solución: $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ que gráficamente lo puedes representar de la siguiente forma.



   b) $|2x - 1| \leq 3 - x$

   Resuelve la inecuación $|2x - 1| \leq 3 - x$. La expresión dentro de los símbolos del valor absoluto, según R_1, cumple la inecuación doble

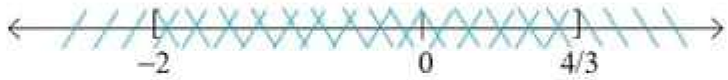
$$-(3 - x) \leq 2x - 1 \leq 3 - x$$

Ahora resuelve cada inecuación, trasponiendo términos hasta despejar la variable.

$$-(3-x) \le 2x-1 \qquad\qquad 2x-1 \le 3-x$$
$$-3+x \le 2x-1 \qquad\qquad 2x+x \le 3+1$$
$$x-2x \le -1+3 \qquad\qquad 3x \le 4$$
$$-x \le 2 \qquad\qquad x \le 4/3$$
$$x \ge -2$$

Conjunto solución: $[-2, +\infty)$ Conjunto solución: $(-\infty, 4/3]$

La inecuación dada $|2x-1| \le 3-x$ tiene como conjunto solución la intersección de ambos conjuntos solución, es decir $[-2, 4/3]$. Gráficamente lo puedes representar de la siguiente forma



Actividad formativa 5.3

1. Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto.

a) $|x| < 1/2$ b) $|x| > 1/2$ c) $|x-1| \le 3$ d) $|x-1| \ge 3$

e) $\left|x+\frac{1}{4}\right| > \frac{1}{2}$ f) $|2x+5| > 7$ g) $|3x-7| < 5$ h) $\left|\frac{2x-5}{3}\right| < 2$

i) $|x-1| > 2x$ j) $|x-5| \le x-1$

Aplicaciones de las inecuaciones lineales

Las inecuaciones tienen múltiples aplicaciones tanto en las ciencias, como en situaciones prácticas de la vida real, que dan origen a problemas que se pueden modelar mediante inecuaciones.

Tal es el caso de problemas que se refieren a enmarcar en un determinado rango de valores las soluciones admisibles, cuando la situación se describe a través de expresiones como determinar "al menos", "a lo sumo", "más que", "no menos que", "valor máximo o mínimo", por citar algunas.

Toda medición (por ejemplo, de longitudes o de tiempo, entre muchas), es una comparación de lo que se quiere medir con respecto a un elemento escogido como unidad, por lo que son aproximaciones que dependen de la precisión de los instrumentos empleados o de la habilidad de quien los opera y en muchas ocasiones se expresan a través de desigualdades.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de situaciones que se pueden modelar y resolver utilizando las inecuaciones estudiadas.

Ejemplo formativo 5.5

1. El perímetro de un terreno rectangular es menor o igual que 44 metros. Si su ancho es dos metros menor que su largo, encontrar los máximos valores posibles del largo y el ancho del rectángulo.

Resolución

Como no hay ningún dato sobre el largo del rectángulo, considerémoslo como la variable a determinar.

Largo: l

Ancho: $l-2$.

Perímetro del rectángulo: $2(l+l-2)$

Por tanto, $2(l + l - 2) \leq 44$

$$4l - 4 \leq 44$$

$$4l \leq 48$$

$$l \leq 12$$

Si el largo $l \leq 12$, entonces el ancho, $l - 2 = 12 - 2 = 10$.

Respuesta. La medida del largo debe ser menor o igual que 12 y la del ancho debe ser menor o igual que 10.

Ejemplo formativo 5.6

1. En un experimento químico, la solución de ácido clorhídrico debe mantenerse de forma que su temperatura, en grados Celsius, no sea menor que 28 °C, ni mayor de 37 °C. ¿Cuál será la variación de la temperatura en grados Fahrenheit, conociendo que °C = (5/9)(°F – 32)?

   Resolución

   La temperatura en grados Fahrenheit es desconocida: x

   Los valores en grados Celsius están entre 28 °C y 37 °C.

   Por tanto, $28 \leq (5/9)(x - 32) \leq 37$.

   Entonces, para solucionar el problema, hay que resolver la inecuación anterior, despejando x.

$$28 \leq (5/9)(x - 32) \leq 37$$

$$(9/5)(28) \leq x - 32 \leq (9/5)(37)$$

$$50.4 \leq x - 32 \leq 66.6$$

$$50.4 + 32 \leq x \leq 66.6 + 32$$

$$82.4 \leq x \leq 98.6$$

   Respuesta. La variación de la temperatura en grados Fahrenheit estará entre 82.4 °F y 98.6 °F.

Ejemplo formativo 5.7

1. Un bebé a los tres meses de nacido pesa como promedio unas 13 libras y un bebé se considera sano, en cuanto al peso, si pesa 2.5 lb más o menos que el peso promedio. Determina el rango de peso en que un bebé de tres meses es considerado sano.

   Resolución

   La variable a determinar es el peso del bebé para considerarlo sano.

   Peso del bebé: x.

   Como x puede estar por encima o por debajo del peso promedio en un valor no mayor que 2.5 lb, ello significa que el valor absoluto de la diferencia entre x y 13 tiene que ser menor o igual que 2.5, es decir

$$|x - 13| \leq 2.5$$

$$-2.5 \leq x - 13 \leq 2.5$$

$$13 - 2.5 \leq x \leq 13 + 2.5$$

$$10.5 \leq x \leq 15.5$$

   Por tanto, el rango del peso para que el bebé sea considerado sano está entre 10.5 y 15.5 lb.

Actividad formativa 5.4

1. Para aprobar un curso, un estudiante necesita un promedio mínimo de 80 puntos. Si en los tres primeros exámenes obtuvo 72, 80 y 91 puntos, ¿qué calificación debe obtener como mínimo en el cuarto y último examen para aprobar el curso?
2. Un fabricante de lámparas realiza gastos fijos mensuales por $12,000 que incluyen salarios, costos de operación de la planta y renta de la sala de exhibición. Si cada lámpara se vende en $85 y el material que se usa en su producción cuesta $30, ¿cuántas lámparas debe hacer y vender cada mes para obtener una ganancia mínima de $4,500 por mes?
3. ¿Qué números satisfacen la siguiente condición: seis más el triplo de un número es menor o igual a dicho número?
4. ¿Qué números satisfacen la siguiente condición: siete menos la quinta parte de un número es mayor o igual que dicho número?
5. Si la temperatura en el ártico en un período de 24 horas varía entre -49 °F y 14 °F, ¿cuánto varía en grados Celsius, sabiendo que °F = (9/5) °C + 32?
6. Una persona sabe que su peso ideal, de acuerdo con su estatura, debe estar entre 60 kg y 65 kg. Ella calcula que, si pesara 45 kg menos que el doble de su peso actual, estaría dentro de ese rango saludable. ¿Entre qué límites está su peso?
7. Un estudiante recibió calificaciones de 86, 75 y 80 puntos en tres pruebas. ¿Cuál deberá ser su calificación en la siguiente prueba para que su promedio en las cuatro pruebas sea como mínimo 82?
8. María va a comprar tres vestidos y dos blusas y para ello dispone de un presupuesto de $900. Todos los vestidos tienen igual precio, al igual que las blusas, pero el precio de los vestidos es el doble que el de una blusa. ¿Cuánto es lo máximo que puede pagar por cada vestido y por cada blusa para mantenerse dentro del presupuesto?
9. Las estaturas de las dos terceras partes de los habitantes de un poblado, medidas en pulgadas, satisfacen la desigualdad $\left|\frac{h-68.5}{2.7}\right| \leq 1$. ¿En qué intervalo se encuentran dichas estaturas?
10. Una compañía fabrica un producto cuyo precio unitario de venta es de $200 y el costo unitario por producirlo es de $150. Si los costos fijos de la fábrica son de $600,000, determina el número de unidades del producto que deben ser vendidas como mínimo para que la compañía tenga utilidades.
11. Un padre decide ir junto con sus hijos a un concierto y para ello dispone de $1,500. Si comprara entradas de $300 le falta dinero, pero si compra entradas de $220 le sobra. ¿Cuántos hijos tiene?

EVALUACIÓN FORMATIVA 5.1

1. Resuelve las siguientes inecuaciones.
   a) $2(2x+3)-10<6(x-2)$
   b) $\frac{2x-3}{4}+6 \geq 2+\frac{4x}{3}$
   c) $-3<7-2x \leq 7$
   d) $|6-x| \geq x-3$
2. Un camión puede transportar hasta 1,000 kg de carga. Si ya lleva una carga que pesa 200 kg, ¿cuántas cajas puede llevar adicionalmente si cada una pesa 30 kg?

3. En una granja se tiene cierto número de pollos. Se duplicó la cantidad de ellos y se vendieron 27, quedando menos de 54. Posteriormente, se triplicó el número de pollos que había al inicio y se vendieron 78, quedando más de 39. ¿Cuántos pollos había inicialmente?

4. En un supermercado, las naranjas etiquetadas como "medianas" deben pesar alrededor de 120 gramos, con una tolerancia máxima de 10 gramos (por encima o por debajo).

   a) Escribe la inecuación usando la variable w (en gramos) que represente esta condición de peso.

   b) Calcula el intervalo de pesos que cumple con la clasificación de "medianas".

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ___________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 5. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Resolví problemáticas teóricas y contextuales relacionadas con inecuaciones lineales. (M2-C1)			
Utilicé ejemplos concretos para justificar mi postura a favor o en contra de afirmaciones relacionadas con las inecuaciones lineales. (M4-C2)			
Identifiqué correctamente las variables clave en un problema modelando la situación. (M2-C3)			
Defendí el proceso de resolución de una inecuación lineal con argumentos sólidos y adaptándome a retroalimentaciones del equipo o del docente. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

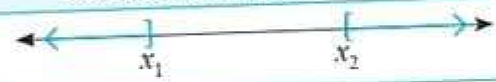
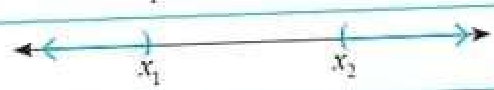
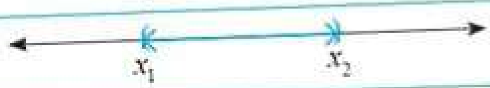
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 5 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Resolvió problemáticas teóricas y contextuales relacionadas con inecuaciones lineales. (M2-C1)			
Utilizó ejemplos concretos para justificar su postura a favor o en contra de afirmaciones relacionadas con las inecuaciones lineales. (M4-C2)			
Identificó correctamente las variables clave en un problema modelando la situación. (M2-C3)			
Defendió el proceso de resolución de una inecuación lineal con argumentos sólidos y adaptándose a retroalimentaciones del equipo o del docente. (M3-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Inecuaciones cuadráticas

Inecuación de la forma	Solución en intervalo	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$	
$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1, x_2]$	
$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	

Progresión de aprendizaje 6

Analiza diferentes formas de resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, y diseña un algoritmo que resuelva inecuaciones cuadráticas y represente gráficamente las soluciones.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 6.1

1. ¿Qué sucede con la desigualdad $a < b$ al multiplicar ambos lados por un número negativo?
   a) Se conserva la misma dirección de la desigualdad.
   b) La desigualdad se invierte (cambia de sentido).
   c) Se anula la desigualdad porque se multiplica por un número negativo.
2. La descripción "los números x mayores o iguales que -3 y menores que 5" se escribe en notación de intervalo como:
   a) $(-3, 5)$ b) $[-3, 5]$ c) $[-3, 5)$
3. La factorización del trinomio $x^2 - 2x + 1$ es:
   a) $(x + 1)^2$ b) $(x - 1)(x + 1)$ c) $(x - 1)^2$
4. ¿Cuáles son las soluciones de $2x^2 - 5x + 2 = 0$ usando la fórmula general?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ donde } a = 2,\ b = -5,\ c = 2.$$

   a) $x = \frac{5 \pm 3}{4}$ b) $x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ c) $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

Una inecuación cuadrática de una variable, es una inecuación que se puede escribir en alguna de las siguientes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

donde a, b, y c son números reales, con $a \neq 0$.

Son ejemplos de inecuaciones cuadráticas de una variable:

$$2x^2 + 3x - 2 < 0, \quad x^2 - 4 > 0, \quad x^2 - x - 6 \leq 0, \quad x^2 + 2x \geq 0$$

Recuerda que una ecuación cuadrática puede tener dos, una o ninguna solución real. En el caso de una inecuación cuadrática, esta puede tener infinitas, una o ninguna solución real. En este sentido, la **solución de una inecuación cuadrática** es el conjunto de todos los valores de la variable que hacen a la inecuación verdadera.

Ejemplo formativo 6.1

1. Verifica si $x = -6, 0, 5$ son soluciones de la inecuación $x^2 + 3x - 10 > 0$.

Resolución

Verifica para $x = -6$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &> 0 \\ (-6)^2 + 3(-6) - 10 &> 0 \\ 36 - 18 - 10 &> 0 \\ 8 &> 0 \end{aligned}$$

Dado que $8 > 0$, entonces $x = -6$ es una solución de la inecuación.

Verifica para $x = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &> 0 \\ (0)^2 + 3(0) - 10 &> 0 \\ -10 &\not> 0 \end{aligned}$$

Dado que $-10 \not> 0$, entonces $x = 0$ no es una solución de la inecuación.

Verifica para $x = 5$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &> 0 \\ (5)^2 + 3(5) - 10 &> 0 \\ 25 + 15 - 10 &> 0 \\ 30 &> 0 \end{aligned}$$

Dado que $30 > 0$, entonces $x = 5$ es una solución de la inecuación.

En el Ejemplo formativo 6.1 dos soluciones de $x^2 + 3x - 10 > 0$ son -6 y 5. Sin embargo, no son las únicas, debido a que hay infinitos valores que satisfacen la inecuación, por lo que no es posible verificar uno por uno para determinarlas todas.

Para determinar todas las soluciones de una inecuación cuadrática de una variable existen diferentes métodos, uno de ellos es el método de los signos que regularmente se usa en los cursos de cálculo, aquí, vas a usar el método de valores de prueba, que es una abreviación del método de los signos y es más intuitivo.

Estrategia sugerida para resolver inecuaciones cuadráticas

1. De ser necesario, aplica la transposición de términos para escribirlos en el miembro izquierdo de la inecuación y que en el miembro derecho quede un cero.
2. Escribe la inecuación como una ecuación cuadrática en la forma estándar y resuélvela aplicando la factorización o la fórmula general. Las soluciones son los valores frontera o puntos críticos.
3. Construye una recta numérica y marca cada valor frontera del paso 1 como sigue:
   - Si el símbolo de la inecuación es $<$ o $>$, utiliza un círculo sin rellenar ○.
   - Si el símbolo de la inecuación es $\leq$ o $\geq$, utiliza un círculo relleno ●.
4. Selecciona un valor de prueba en cada intervalo y determina si satisface la inecuación.
5. La solución es el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad. Escríbela en la forma solicitada (conjunto, inecuación, intervalo o gráfica).

Si tienes una inecuación cuadrática con el coeficiente del término cuadrático negativo, por ejemplo, la inecuación $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$, la puedes transformar en una inecuación equivalente con el coeficiente del término cuadrático positivo al multiplicar por -1 en ambos lados de la inecuación.

$$(-1)(-x^2 + 4x - 4) \geq (-1)(0) \rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

Luego, puedes resolverla aplicando la estrategia sugerida. Una vez resuelta, te darás cuenta que una inecuación cuadrática puede tener dos valores frontera, uno o ninguno. Lo anterior depende del número de soluciones que tenga la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Inecuaciones cuadráticas que tienen dos valores frontera

Los valores frontera son los puntos donde la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ cambia de signo, y suelen coincidir con las **raíces** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Si la ecuación cuadrática tiene **dos raíces reales distintas,** digamos x_1 y x_2 (con $x_1 < x_2$), esas dos raíces actúan como **valores frontera**. Estos valores se usan para dividir la recta numérica en **tres intervalos**: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y $(x_2, +\infty)$. Dentro de cada intervalo, la expresión $ax^2 + bx + c$ mantiene un signo constante, mismo que se usa para verificar que se satisface o no la inecuación cuadrática.

Ejemplo formativo 6.2

1 Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 3x > 10$ b) $3x^2 - 2x - 2 \leq 0$

Resolución

a) $x^2 + 3x > 10$

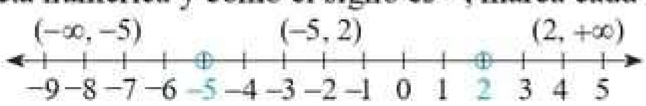
Paso 1. Aplica la transposición de términos para agregarlos en el miembro izquierdo de la inecuación y que en el miembro derecho quede un cero.

$$x^2 + 3x > 10 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x - 10 > 0$$

Paso 2. Escribe la inecuación como ecuación cuadrática y resuélvela, en este caso por factorización.

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$(x + 5)(x - 2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$
$$x_1 = -5 \text{ o } x_2 = 2$$

Paso 3. Construye una recta numérica y como el signo es >, marca cada valor frontera con ○.



Paso 4. Selecciona un valor de prueba de cada intervalo y verifica si satisface la inecuación.

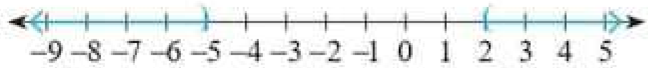
Valor de prueba:	Valor de prueba:	Valor de prueba:
$x = -7$	$x = 0$	$x = 3$
$(-7)^2 + 3(-7) > 10$	$0^2 + 3(0) > 10$	$3^2 + 3(3) > 10$
$49 - 21 > 10$	$0 + 0 > 10$	$9 + 9 > 10$
$28 > 10$	$0 \not> 10$	$18 > 10$

Paso 5. Escribe la solución en la forma solicitada (conjunto, inecuación, intervalo o gráfica).

En forma de conjunto. La solución es: $\{x | x < -5 \text{ o } x > 2\}$.

En forma de inecuación. La solución es: $x < -5$ o $x > 2$.

En forma de intervalo. La solución es: $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

En forma gráfica. La solución es: 

b) $3x^2 - 2x - 2 \leq 0$

$3x^2 - 2x - 2 = 0$

$a = 3,\ b = -2,\ c = -2$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

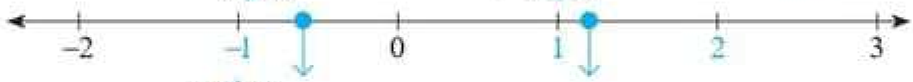
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \text{ o } x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$$

Valor de prueba:	Valor de prueba:	Valor de prueba:
$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
$3(-1)^2 - 2(-1) - 2 \leq 0$	$3(1)^2 - 2(1) - 2 \leq 0$	$3(2)^2 - 2(2) - 2 \leq 0$
$3 + 2 - 2 \leq 0$	$3 - 2 - 2 \leq 0$	$12 - 4 - 2 \leq 0$
$3 \not\leq 0$	$-1 \leq 0$	



$6 \not\leq 0$

$\frac{1 - \sqrt{7}}{3}$ $\frac{1 + \sqrt{7}}{3}$

En forma de conjunto. La solución es:

$$\left\{x \,\middle|\, \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right\}$$

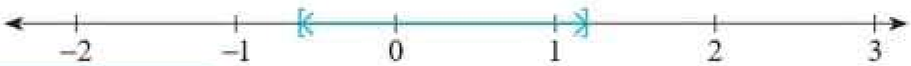
En forma de inecuación. La solución es:

$$\frac{1 - \sqrt{7}}{3} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$$

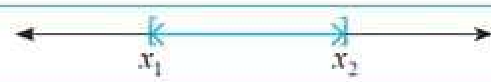
En forma de intervalo. La solución es:

$$\left[\frac{1 - \sqrt{7}}{3}, \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right]$$

En forma gráfica. La solución es:



Si la inecuación cuadrática con coeficiente del término cuadrático positivo tiene dos valores frontera o puntos críticos x_1 y x_2, con $x_1 < x_2$, entonces puedes usar la siguiente tabla para determinar la solución.

Inecuación de la forma	Solución en intervalo	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$	
$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1, x_2]$	
$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	

En el Ejemplo formativo 6.2 a, la inecuación es de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, por lo que la solución es la unión de dos intervalos infinitos abiertos en los que uno de sus extremos es un punto crítico. El Ejemplo formativo 6.2 b, es de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, por lo que la solución es un intervalo cerrado cuyos extremos son los puntos críticos.

Actividad formativa 6.1

1. Analiza y selecciona la opción que consideres correcta. A continuación, se muestran los pasos para resolver la inecuación cuadrática $x^2 - 4x \geq 5$.

   Paso 1. Transponer los términos para que el lado derecho sea igual a cero:

   a) $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ b) $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ c) $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

   Paso 2. ¿Cuáles son los valores frontera que obtienes al resolver la ecuación cuadrática?

   a) $x = 5$ y $x = -1$ b) $x = 4$ y $x = -5$ c) $x = 3$ y $x = -2$

   Paso 3. ¿Cuáles son los intervalos de prueba?

   a) $(-\infty, -1), (-1, 5), (5, +\infty)$

   b) $(-\infty, 0), (0, 4), (4, +\infty)$

   c) $(-\infty, -1), (0, 5), (5, +\infty)$

   Paso 4. Para cada intervalo selecciona el valor de prueba que indica que el resultado satisface la inecuación $x^2 - 4x \geq 5$.

Para el intervalo $(-\infty, -1)$:	Para el intervalo $(-1, 5)$:	Para el intervalo $(5, +\infty)$:
$x = -2$, resultado igual a 5.	$x = 0$, resultado mayor que 5.	$x = 6$, resultado mayor que 5.
$x = -3$, resultado mayor que 5.	$x = 2$, resultado mayor que 5.	$x = 7$, resultado menor que 5.
$x = -1$, resultado menor que 5.	$x = 1$, resultado igual a 5.	$x = 8$, resultado igual a 5.

   Paso 5. ¿Cuál es el conjunto solución?

   a) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ b) $(-1, 5)$ c) $[0, 5)$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

   a) $x^2 + 4x \leq 0$ b) $x^2 - 7x + 6 < 0$

   c) $x^2 - 10x + 21 > 0$ d) $x^2 - 2x \geq 6$

Inecuaciones cuadráticas que tienen un valor frontera

Si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única raíz real, digamos x_1, esa raíz actúa como valor frontera. Este valor se usa para dividir la recta numérica en dos intervalos: $(-\infty, x_1)$, $(x_1, +\infty)$. Dentro de cada intervalo, la expresión $ax^2 + bx + c$ mantiene un signo constante, mismo que se usa para verificar que se satisface o no la inecuación cuadrática.

Ejemplo formativo 6.3

1. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

   a) $x^2 + 2x + 1 > 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

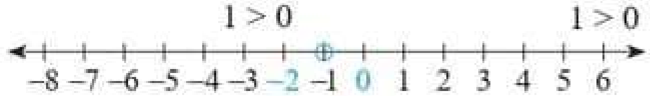
   Resolución

   a) $x^2 + 2x + 1 > 0$

   $$x^2 + 2x + 1 = 0$$
   $$(x+1)^2 = 0$$
   $$\sqrt{(x+1)^2} = 0$$
   $$|x+1| = 0$$
   $$x + 1 = 0$$
   $$x = -1$$

   Valor de prueba:
   $$x = -2$$
   $$(-2)^2 + 2(-2) + 1 > 0$$
   $$4 - 4 + 1 > 0$$
   $$1 > 0$$

   Valor de prueba:
   $$x = 0$$
   $$(0)^2 + 2(0) + 1 > 0$$
   $$0 + 0 + 1 > 0$$
   $$1 > 0$$



El único valor de x que no satisface a la inecuación $x^2 + 2x + 1 > 0$, es el valor frontera o punto crítico $x = -1$. Entonces, la solución para la inecuación es $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

b) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$\sqrt{(x-2)^2} = 0$$
$$|x-2| = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Valor de prueba:

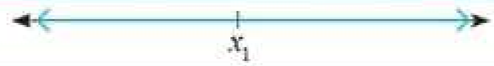
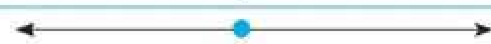
$$x = 0$$
$$(0)^2 - 4(0) + 4 \leq 0$$
$$0 - 0 + 4 \leq 0$$
$$4 \nleq 0$$

Valor de prueba:

$$x = 3$$
$$(3)^2 - 4(3) + 4 \leq 0$$
$$9 - 12 + 4 \leq 0$$
$$1 \nleq 0$$

Solo hay un valor para x que satisface a la inecuación $x^2 - 4x + 4 \leq 0$, y ese es el valor frontera o punto crítico $x = 2$. Entonces, la solución establecida para la inecuación es el conjunto $\{2\}$.

Si la inecuación cuadrática con coeficiente del término cuadrático positivo, tiene un único valor frontera o punto crítico x_1, entonces puedes usar la siguiente tabla para determinar la solución.

Inecuación de la forma	Solución en intervalo	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty, +\infty)$	 x_1
$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$	 x_1
$ax^2 + bx + c \leq 0$	La única solución es x_1	 x_1
$ax^2 + bx + c < 0$	La solución es el conjunto vacío Ø	 x_1

En el Ejemplo formativo 6.3 a, la inecuación es de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, por lo que la solución es la unión de dos intervalos infinitos abiertos, en los que uno de sus extremos es el punto crítico. En el Ejemplo formativo 6.3 b, la inecuación es de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, por lo que la solución es el punto crítico.

Actividad formativa 6.2

1. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 10x + 25 > 0$

b) $3x^2 - 18x + 27 \leq 0$

c) $-4x^2 + 28x - 49 \leq 0$

d) $4x^2 > 12x - 9$

Inecuaciones cuadráticas que no tienen valores frontera

Si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ **no tiene raíces reales**, entonces como consecuencia, la inecuación cuadrática puede ser verdadera para todos los valores de x o para ninguno.

Ejemplo formativo 6.4

1. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 9 \geq 0$

b) $x^2 + x + 1 < 0$

Resolución

a) $x^2 + 9 \geq 0$

$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-9}$$

La ecuación $x^2 + 9 = 0$ no tiene soluciones reales, por lo que la inecuación cuadrática no tiene valores frontera. Sin embargo, cualquier número real satisface a la inecuación $x^2 + 9 \geq 0$, por lo que la solución es el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

b) $x^2 + x + 1 < 0$

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$a = 1, b = 1, c = 1$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

El discriminante es menor que cero ($-3 < 0$), por lo que la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, en consecuencia, la inecuación cuadrática no tiene valores frontera. Es decir, no hay valores de x que satisfagan la inecuación $x^2 + x + 1 < 0$, por lo tanto, la solución es el conjunto vacío Ø.

Si la inecuación cuadrática con coeficiente del término cuadrático positivo, no tiene valores frontera o puntos críticos, entonces puedes usar la siguiente tabla para determinar la solución.

Inecuación de la forma	Solución en intervalo	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty, +\infty)$	0
$ax^2 + bx + c > 0$		
$ax^2 + bx + c \leq 0$	La solución es el conjunto vacío Ø	0
$ax^2 + bx + c < 0$		

En el Ejemplo formativo 6.4 a, la inecuación es de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, por lo que la solución es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, es decir, todo número real. En el Ejemplo formativo 6.4 b, la inecuación es de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, por lo que la solución es el conjunto vacío Ø.

Actividad formativa 6.3

1. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

   a) $x^2 + 3 \geq 0$

   b) $-3x^2 + x - 1 < 0$

   c) $2x^2 + 6x + 7 < 0$

   d) $-x^2 + 5x \geq 24$

Evaluación formativa 6.1

1. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas.

   a) $-x^2 \geq -2x + 15$

   b) $x^2 - 25x + 150 < 0$

   c) $9x^2 + 6x + 1 > 0$

2. La ganancia diaria de Mario (en dólares) por vender x suscripciones a revistas está determinada por la fórmula, $G(x) = x^2 + 5x - 50$. ¿Para qué valores de x es positiva su ganancia?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Ejecuté con precisión métodos de resolución de inecuaciones cuadráticas usando la factorización o la fórmula general para determinar los valores frontera. (M2-C1)			
Respondí con fundamentos a cuestionamientos de mis pares o docentes sobre la resolución de inecuaciones cuadráticas. (M4-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 6 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Ejecutó con precisión métodos de resolución de inecuaciones cuadráticas usando la factorización o la fórmula general para determinar los valores frontera. (M2-C1)			
Respondió con fundamentos a cuestionamientos de sus pares o docentes sobre la resolución de inecuaciones cuadráticas. (M4-C2)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones

$$
\text{Funciones}
\begin{cases}
\text{Algebraicas}
\begin{cases}
\text{Polinomiales: } f(x) = 2x - 1,\ f(x) = x^2 + 4x + 3 \\
\text{Racionales: } f(x) = \dfrac{2x}{x-1} \\
\text{Irracionales: } f(x) = \sqrt{2x+4},\ f(x) = \sqrt[3]{x+1}
\end{cases} \\
\text{Trascendentes}
\begin{cases}
\text{Trigonométricas: } f(x) = \operatorname{sen} 2x,\ f(x) = \cos x + 3 \\
\text{Exponenciales: } f(x) = 2^{2x},\ f(x) = 3^{x+1},\ f(x) = e^{3x} \\
\text{Logarítmicas: } f(x) = \log_2 x,\ f(x) = \log_3 x,\ f(x) = \ln x
\end{cases}
\end{cases}
$$

Progresión de aprendizaje 7

Formula una clasificación para los diferentes tipos de funciones basada en sus propiedades y comportamientos, y diseña ejemplos y contraejemplos para ilustrar los conceptos claves de las funciones.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGÓSTICA 7.1

Escribe en el paréntesis la letra de la respuesta correcta:

1. ¿Cuál es la expresión factorizada de $6x^2 - 19x - 20$? ( )

   a) $(2x+5)(3x-4)$　　b) $(6x-5)(x+4)$

   c) $(x-5)(6x+4)$　　d) $(x-4)(6x+5)$

2. ¿Cuál es la expresión que representa el producto $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}$? ( )

   a) $\sqrt[3]{x^4}$　　b) $x\sqrt[6]{x^5}$　　c) $x\sqrt[3]{x^2}$　　d) $\sqrt[6]{x^4}$

3. ¿Cuáles son las raíces de $4x^2 + 13x - 12 = 0$? ( )

   a) $x = -4$ y $x = 3$　　b) $x = -4$ y $x = 3/4$　　c) $x = 4$ y $x = -3$　　d) $x = 4$ y $x = -3/4$

4. La rapidez y con la que un automóvil recorre 500 kilómetros depende del tiempo x que emplea para ello. ¿Cuál es la expresión que representa esta situación? ( )

   a) $y = 500x$ b) $y = \frac{500}{x}$ c) $y = \frac{x}{500}$ d) $x = 500y$

5. Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x - 1$, ¿cuál es la expresión que le corresponde a $f(x) - g(x)$? ( )

   a) $3x^2 - 5x - 1$ b) $3x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 5x + 1$ d) $3x^2 - x + 1$

Las funciones constituyen tema de estudio desde Pensamiento Matemático II y Pensamiento Matemático III, donde se introducen funciones numéricas, como la función lineal, la función cuadrática y funciones de tercer grado. Ahora vamos a profundizar en el concepto de función y analizar una clasificación más amplia de las funciones, así como estudiar algunas de sus características y propiedades principales, las que se analizarán en forma más detallada en sucesivas progresiones de aprendizaje.

Funciones. Definiciones y representaciones

Para establecer con precisión la definición de función, son necesarios tres elementos fundamentales: el dominio, la regla de correspondencia y el rango. Una función relaciona a una variable "x" llamada variable independiente, con una variable "y" llamada variable dependiente, mediante una expresión como $y = f(x)$, cuyo significado es que, "y" está relacionada con "x", a través de f, donde $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x". Para representar una función, es común el uso de las letras como f, g, h, etc.

Definiciones de función

1. Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una relación o regla de correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asigna un único elemento $y = f(x) \in B$.
2. Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.
3. Una función es una relación entre dos variables (x, y) de tal manera que a x (la variable independiente), le corresponde uno y sólo uno de los valores de y (la variable dependiente).

Las definiciones anteriores son equivalentes, y cualquiera de ellas se puede utilizar para verificar si una relación matemática representa o no una función. Esto implica identificar que la regla de correspondencia satisfaga o no la definición de función.

En el código QR 7.1 podrás ver un video en relación con el concepto de función.

QR 7.1. Concepto de función. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzybite 2025

Representaciones de una función

Una función puede tener diversas representaciones, tales como: forma algebraica, verbal, tabla de valores, conjunto de pares ordenados, gráfica y mediante un diagrama.

Ejemplos de diferentes representaciones de una función $y = f(x)$ son:

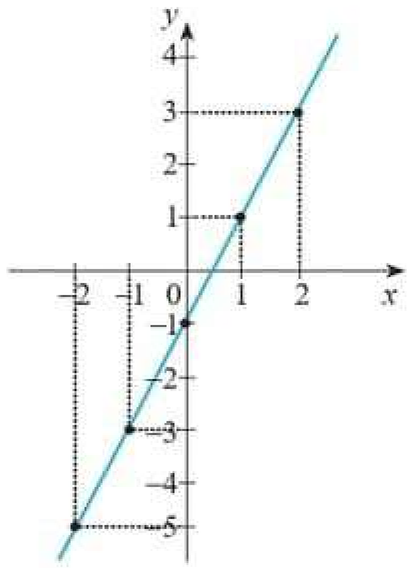
a) En forma algebraica: $f(x) = 2x - 1$

   Cuando nos referimos a una función, escribir $f(x) = 2x - 1$ o $y = 2x + 1$, representa lo mismo. Ambas expresiones indican que hay una regla que relaciona a cada valor de x con un único valor de salida. La diferencia es que $f(x)$ nos recuerda que estamos considerando una función cuyo nombre es f.

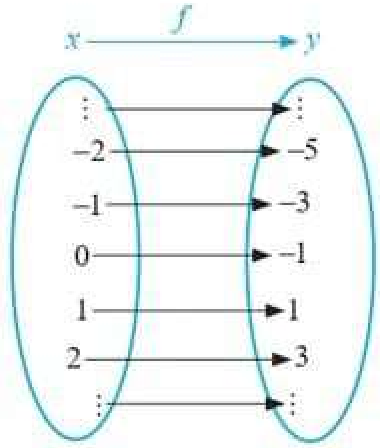
b) En forma de tabla de valores.

x	$f(x)$
⋮	⋮
–2	–5
–1	–3
0	–1
1	1
2	3
⋮	⋮

c) En forma de gráfica.



d) En forma de diagramas.



e) En forma de conjunto de pares ordenados:

$$\{\ldots, (-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3), \ldots\}$$

f) En forma verbal: a cada número real se hace corresponder el doble disminuido en uno.

Ejemplo formativo 7.1

1. Con base en las definiciones de función, determina cuáles de las siguientes relaciones matemáticas representan funciones, argumenta las respuestas.

En forma algebraica:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \sqrt{2x+1}$ c) $y = \sqrt[3]{x^2 - 8}$

Resolución

a) La relación $y = x^2 - 1$ representa a una función, ya que a cada valor de x le corresponde un único valor y.

b) La relación $y^2 = 2x + 1$ no representa a una función, porque a un valor de x le corresponden dos valores de y. Para $x = 1$, $y^2 = 2(1) + 1 = 3$, de donde $y = \pm\sqrt{3}$.

c) La relación $y = \sqrt[3]{x^2 - 8}$ representa a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

En forma de tabla de valores:

a)

x	y
–3	8
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3
3	8

Resolución

Sí es una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b)

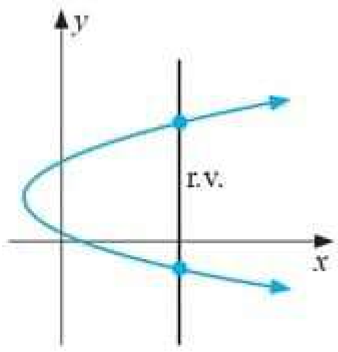
x	y
1	±1
4	±2
9	±3
16	±4
25	±5

Resolución

No es una función, porque a cada valor de x le corresponden dos valores distintos de y.

En forma de gráfica:

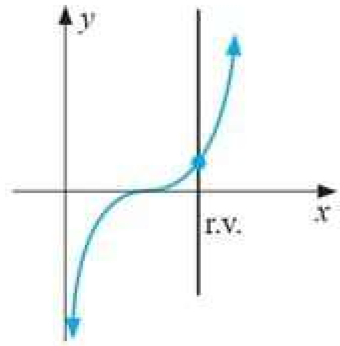
a)



Resolución

No es función, porque al trazar una recta vertical, a un mismo valor de x le corresponden dos valores distintos de y.

b)

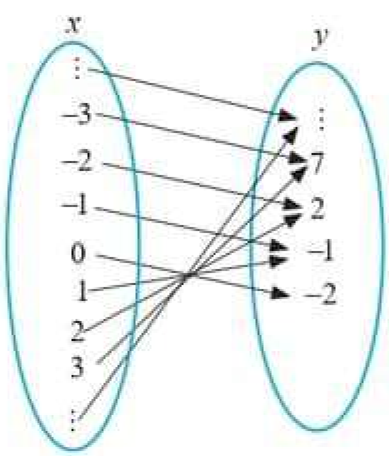


Resolución

Sí es función, porque al trazar una recta vertical, a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

En forma de diagramas:

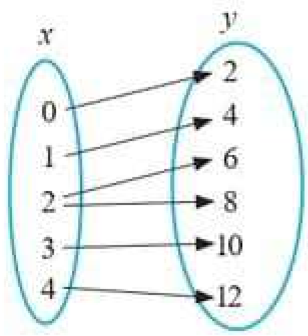
a)



Resolución

Sí es una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b)



Resolución

No es función, porque al valor $x = 2$ le corresponden dos valores diferentes de y.

En forma de pares ordenados:

a) $A = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

b) $B = \{(1, -1), (2, 0), (3, 1), (2, 2), (4, 3)\}$

Resolución

a) Sí es una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) No es función, porque al valor $x = 2$ le corresponden dos valores diferentes de y: $(2, 0)$ y $(2, 2)$.

En forma verbal:

a) A cada número natural par se hace corresponder la semisuma del número aumentado en cuatro unidades.

b) El precio de las naranjas y también de los mangos en el mercado es de veintiséis pesos por kilogramo.

Resolución

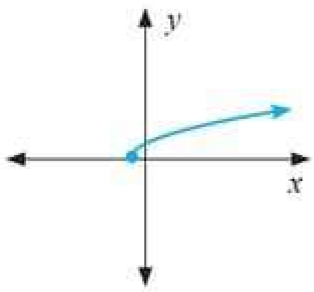
a) Sí es una función, porque a cada número natural par al sumarle cuatro unidades y al resultado dividirlo entre dos, su resultado es único.

b) No es una función, porque a dos frutas distintas le corresponde el mismo precio.

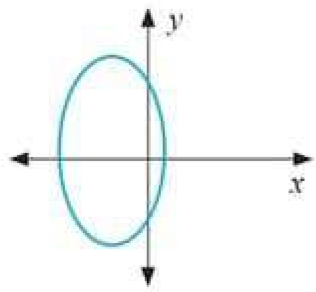
Actividad formativa 7.1

1. Identifica cuáles de las siguientes relaciones matemáticas son funciones y cuáles no lo son, así como la forma en que están expresadas. Argumenta las respuestas:

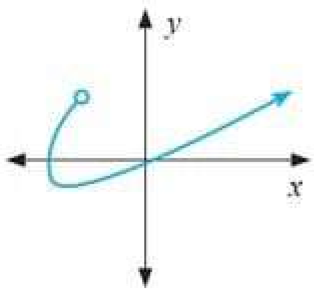
a)



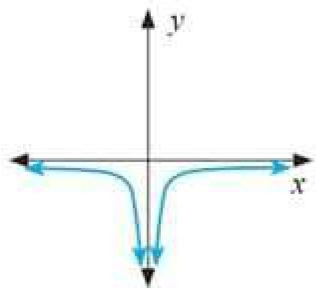
b)



c)

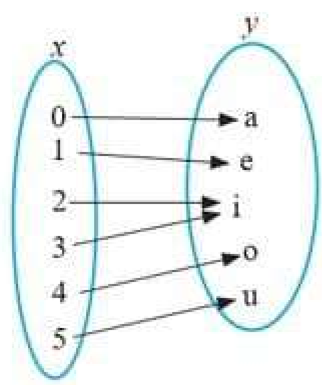


d)



e) $\{(-2, -1), (-1, 0), (0, -1), (1, 2), (2, 3)\}$

f)



g)

x	y
–2	1
–1	2
0	3
1	4
–2	5
3	6

h) $y = \sqrt[3]{x} + 2$

i) $y = x^2 + 4x + 4$

j) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

k) $y = \sqrt{x} + 1$

l) A cada madre se hace corresponder el número de hijos.

m) Cuando un automóvil viaja a velocidad constante, a la distancia recorrida se le hace corresponder el tiempo invertido para recorrerla.

Ejemplo formativo 7.2

1. Un buzo explora un arrecife y con un GPS registra su desplazamiento y profundidad en metros, lo que describe la función $f(x) = \frac{2x^2}{3} - 4x$. Para el desplazamiento se toma como referencia el punto de inmersión y para la profundidad el nivel del mar. Utiliza las diferentes representaciones matemáticas para expresar esta situación.

Resolución

Función $f(x) = \dfrac{2x^2}{3} - 4x$

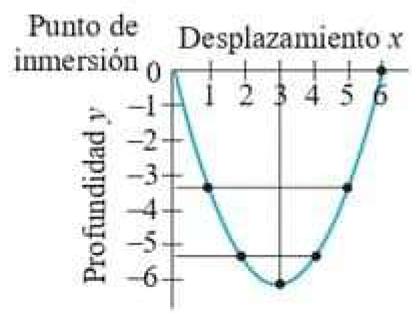
Tabla de valores

Desplazamiento x (metros)	Profundidad y (metros)
0	0
1	–10/3
2	–16/3
3	–6
4	–16/3
5	–10/3
6	0

Pares ordenados

(0, 0)
(1, –10/3)
(2, –16/3)
(3, –6)
(4, –16/3)
(5, –10/3)
(6, 0)

Gráfica



Observa que, tanto los pares ordenados como la correspondencia entre x y y según la gráfica, muestran que la expresión $f(x) = \frac{2x^2}{3} + 4x$ representa a una función.

Actividad formativa 7.2

1. Las siguientes afirmaciones representan a una función. Escribe cada una como un conjunto de pares ordenados y la expresión matemática que la representa:

   a) A cada número real se hace corresponder su cuadrado aumentado en dos.

   b) A cada número real se hace corresponder su recíproco menos uno.

2. Dadas las funciones siguientes en forma algebraica, muestra sus representaciones tabulares, conjunto de pares ordenados, gráficas, diagramas y verbal.

   a) $f(x) = x^3 - 1$ b) $f(x) = 1 - 2x$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Tipos de funciones

Las funciones numéricas se pueden clasificar de diferentes maneras, por ejemplo, en crecientes y decrecientes, explícitas e implícitas, continuas y discontinuas. Existe una clasificación más amplia que permite identificar, para cada tipo de función, tanto las propiedades de las operaciones matemáticas que le están asociadas como las características de sus gráficas. Así, se tiene la siguiente clasificación y ejemplos:

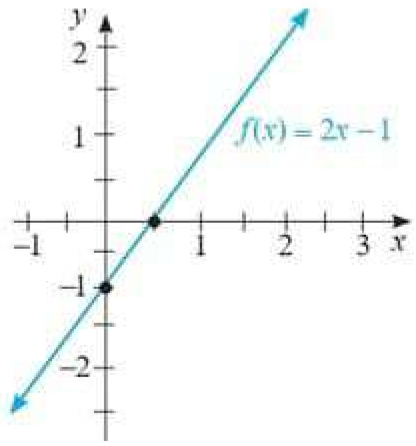
$$\text{Funciones}\begin{cases}\text{Algebraicas}\begin{cases}\text{Polinomiales: } f(x) = 2x - 1,\ f(x) = x^2 + 4x + 3\\ \text{Racionales: } f(x) = \dfrac{2x}{x-1}\\ \text{Irracionales: } f(x) = \sqrt{2x+4},\ f(x) = \sqrt[3]{x+1}\end{cases}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas: } f(x) = \operatorname{sen} 2x,\ f(x) = \cos x + 3\\ \text{Exponenciales: } f(x) = 2^{2x},\ f(x) = 3^{x+1},\ f(x) = e^{3x}\\ \text{Logarítmicas: } f(x) = \log_2 x,\ f(x) = \log_3 x,\ f(x) = \ln x\end{cases}\end{cases}$$

Funciones algebraicas

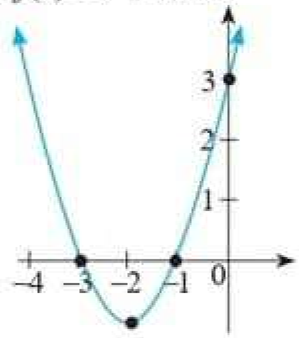
Se caracterizan matemáticamente por expresar la regla de correspondencia mediante una forma algebraica. Esto significa que pueden involucrar operaciones como suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, tanto con números como variables.

Las funciones algebraicas polinomiales de grado "n" son de la forma

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son coeficientes y $a_n x^n$ es el término principal. Ejemplos de estas son la función lineal y la cuadrática.

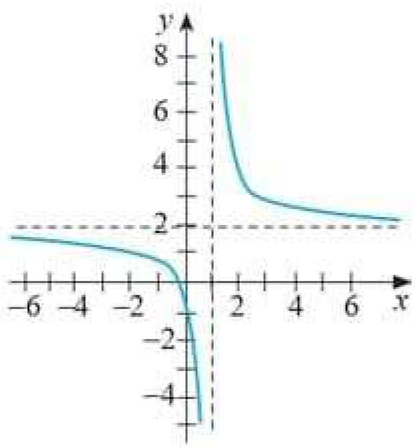


$f(x) = x^2 + 4x + 3$



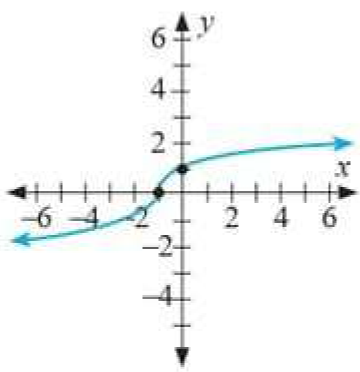
Las funciones algebraicas racionales son aquellas cuya regla de correspondencia puede expresarse como la razón o cociente de dos funciones polinomiales, donde el denominador no es el polinomio nulo; es decir, son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas y $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo se muestra en la siguiente gráfica.

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$



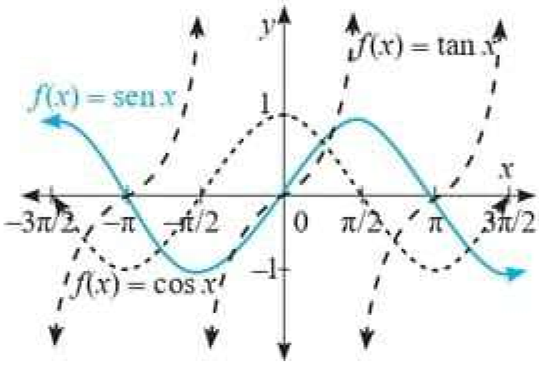
Las funciones algebraicas irracionales son aquellas cuya expresión matemática $f(x)$ presenta la variable independiente dentro de un radical; son de la forma $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, donde $P(x)$ es un polinomio. Un ejemplo se muestra en la siguiente figura.

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$



Funciones trascendentes

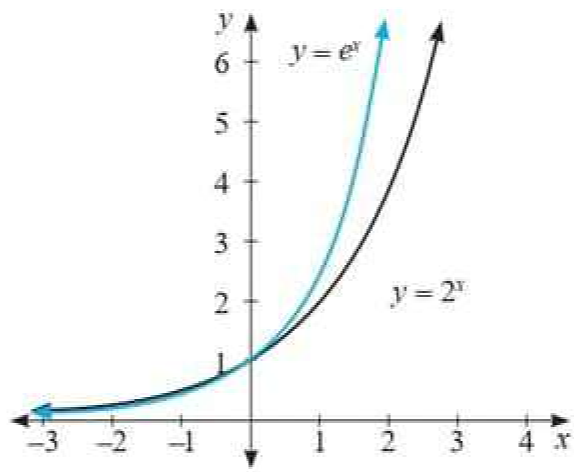
Estas funciones tienen como característica matemática que su regla de correspondencia incluye operaciones que trascienden lo algebraico, es decir, aplican operaciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas sobre las variables.



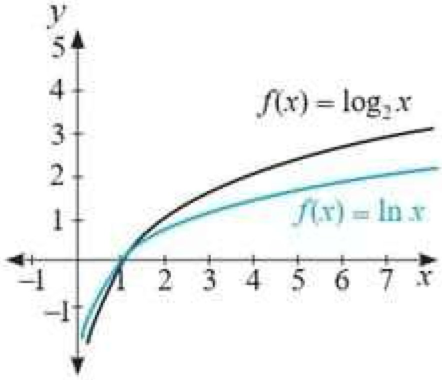
Las funciones trigonométricas son aquellas que aplican operaciones trigonométricas sobre la variable independiente que representa un ángulo, generalmente medido en radianes. Estas funciones son periódicas en su desarrollo, es decir, que se repiten en intervalos definidos.

Existen seis funciones trigonométricas directas, de las cuales, tres son básicas como el seno, coseno y tangente y las otras tres son recíprocas como la cosecante, secante y cotangente, respectivamente.

Las funciones exponenciales tienen como regla de correspondencia una expresión matemática donde la variable independiente se encuentra en el exponente de una potencia. Estas pueden ser de la forma $f(x) = e^x$, donde e es el número de Euler, o de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. En la siguiente figura se muestran dos ejemplos.



Las funciones logarítmicas son aquellas cuya expresión matemática contiene a la variable independiente x en el argumento de un logaritmo. Pueden ser logaritmos (de base a) o logaritmo natural (de base e); es decir, de la forma $f(x) = \log_a x$ y $f(x) = \ln x$, donde a es un número real positivo y diferente de 1. En la siguiente figura se muestran dos ejemplos.



Actividad formativa 7.3

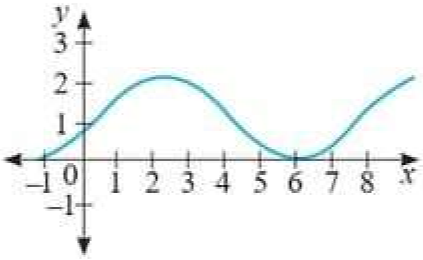
1. Observa con atención las siguientes representaciones de funciones y escribe en cada caso su clasificación:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$ ________________ b) $f(x) = e^{x^2} - 1$ ________________

c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ________________ d) $f(x) = \tan(x^2 - 1)$ ________________

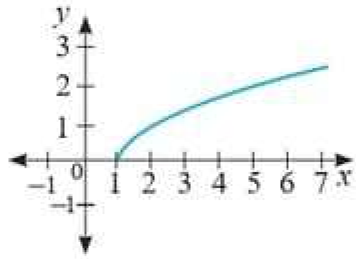
e) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ ________________ f) $f(x) = \ln(3x + 1)$ ________________

g)



____

h)



____

Conceptos generales

Las funciones numéricas poseen diversas características matemáticas y gráficas que las hacen únicas. Existen varios conceptos relacionados con las funciones que permiten un análisis y una descripción precisa de estas características, facilitando su análisis en diferentes representaciones. En esta progresión se presentarán las más generales, toda vez que en las subsiguientes se estudiarán las funciones algebraicas con más detalle y posteriormente las trascendentes.

Dominio y rango de una función

Para determinar el valor "$f(x)$" de una función f en un valor específico de x, es necesario asignar un número real a x para evaluarla. El conjunto de estos valores de la variable independiente x se conoce como **dominio de la función *f*, D_f**. Cada número real x en el que se puede evaluar f está asociado con un único valor $f(x)$, que se denomina **imagen de *x***. El conjunto de estas imágenes de la variable independiente $f(x)$ se conoce como el **rango**, R_f. También se le llama **recorrido o conjunto imagen de la función**.

QR 7.2. Dominio y rango de una función. Video Profe Alex. *Fuente*: Parzybite 2025.

Antes de precisar las definiciones de dominio y rango de una función puedes observar el video que aparece en el código QR 7.2.

Definiciones de dominio y rango de una función numérica

El **dominio** de una función numérica f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

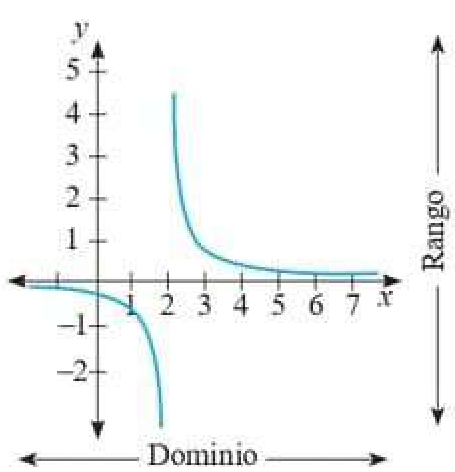
El **rango** de una función numérica f es el subconjunto de números reales que resulta de evaluar $f(x)$ para cada número real de su dominio.

Ejemplo formativo 7.3

1. Observa y analiza la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2x-4}$, que aparece a la derecha, la cual puedes graficar en Desmos o GeoGebra. Determina su dominio y rango.

   Resolución

   A partir de la ecuación puedes determinar el valor de la función para todos los valores de x, excepto para $x = 2$. Al sustituir ese valor en la función $f(2) = \frac{1}{2(2)-4} = \frac{1}{0}$, la función no está definida en $x = 2$.



Por tanto, el dominio de la función es el subconjunto de todos los números reales excepto $x = 2$.

Por su parte, para el rango de la función, según la gráfica en su extensión vertical se observa que hay una interrupción en $y = 0$, luego el rango de la función es el subconjunto de todos los números reales excepto $y = 0$.

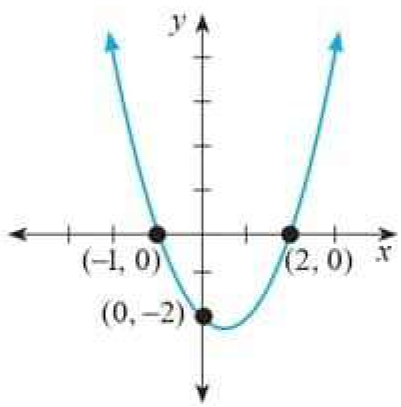
Ordenada al origen y ceros de la función

La **ordenada al origen** es el valor de la variable dependiente (de la función) cuando la variable independiente es cero ($x = 0$), es decir el valor de $f(0)$. Ambos forman el punto de coordenadas $(0, f(0))$ donde la gráfica de la función intercepta el eje "y" del sistema de coordenadas cartesianas.

Los **ceros** de una función, denominados también raíces, son aquellos valores de la variable independiente x para los que el valor de la función $f(x) = 0$, y juntos forman el punto de coordenadas $(x, 0)$ donde la gráfica de la función intercepta el eje x.

Ejemplo formativo 7.4

1. Analiza la función $f(x) = x^2 - x - 2$ y observa su gráfica en la figura de la derecha. Determina la ordenada al origen y los ceros de la función.



Resolución

Ordenada al origen $(x = 0)$, $f(0) = -2$.

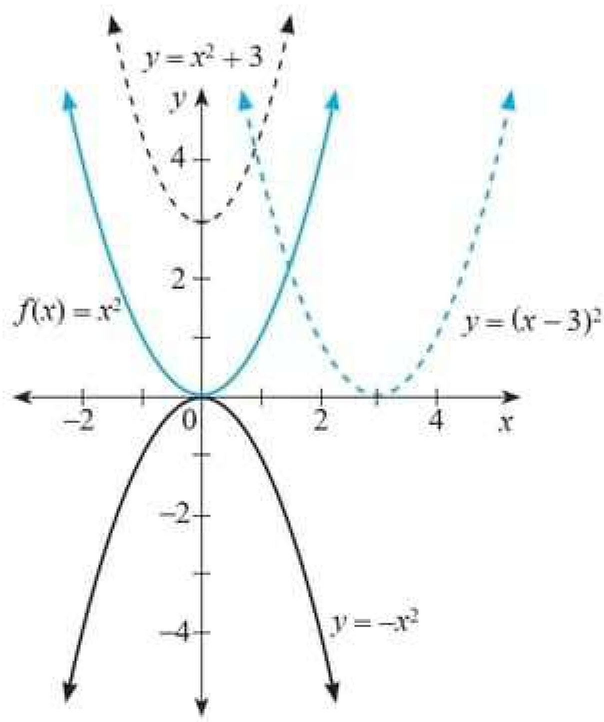
Ceros de la función $(y = 0)$, $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$.

Por factorización se tiene que $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0$.

De los factores obtenidos se tiene que los ceros son: $x = -1$ y $x = 2$.

Traslaciones y reflexiones de una función

Una traslación o una reflexión en una función significa cómo cambia la posición o la orientación del gráfico de esa función en el sistema de coordenadas. Una traslación es un desplazamiento del gráfico de la función sin cambiar su forma. La traslación horizontal está dada por un cambio en la variable independiente x y la vertical afecta a la variable dependiente y, al modificarse la función. Una reflexión invierte el gráfico de la función respecto a un eje.



Las traslaciones y reflexiones de una función son de gran ayuda para graficar una función a partir de otra, lo cual puede significar que cambie o no el dominio y/o rango de una función $y = f(x)$, como resultado del desplazamiento que tiene lugar al modificar la función.

Si por ejemplo se tiene la función $y = x^2$, entonces, como muestra la figura de la derecha:

- Una traslación horizontal 3 unidades a la derecha, significa que la nueva función es $y = (x - 3)^2$. Aquí, la variable independiente x se ajusta en 3 unidades, pero no cambia el dominio.

- Reflexión sobre el eje x. La nueva función es $y = -x^2$. Aquí, la variable dependiente y cambia de signo y el rango cambia a $(-\infty, 0]$.
- Traslación vertical hacia arriba 3 unidades. La nueva función es $y = x^2 + 3$. En este caso, la variable dependiente y aumenta en 3 unidades y la gráfica se desplaza hacia arriba.

Actividad formativa 7.4

Utiliza GeoGebra

1. Con ayuda de un graficador (por ejemplo, GeoGebra) obtén la gráfica de las funciones anteriores y analiza el efecto de la traslación o reflexión en el dominio y rango de la función nueva respecto a la función base $y = x^2$.
2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, traza su gráfica, haz una traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda y con la obtenida una traslación vertical de 4 unidades hacia abajo. Analiza qué efecto tienen estos movimientos en el dominio e imagen respecto a la función en su forma básica $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. A partir de la función $f(x) = \sqrt{x}$ expresa qué movimiento se realizó en las funciones $f(x) = \sqrt{x+4} + 2$ y $f(x) = -(\sqrt{x-1} - 1)$. Determina los efectos en su dominio e imagen.

En las siguientes progresiones de aprendizaje estudiarás con más profundidad estas propiedades de las diferentes funciones algebraicas y otras propiedades específicas de cada una de ellas. El estudio de las funciones trascendentes formará parte de la unidad de aprendizaje curricular del próximo semestre.

Evaluación formativa 7.1

1. El conjunto de todos los valores en los que una función está definida se llama ________, y el conjunto de las imágenes se llama __________________ de la función.
2. Completa la siguiente tabla, escribiendo la fórmula de una función básica diferente para cada caso que, al aplicarle una traslación o reflexión, cumpla las condiciones que se indican.

	Dominio		Rango	
	No cambia	Si cambia	No cambia	Si cambia
Traslación de	$f(x) = x$			
Reflexión de				$f(x) = e^x$

3. Apóyate de un graficador para obtener las representaciones gráficas de las siguientes funciones. A partir de las gráficas determina: la ordenada al origen, los ceros, el dominio y el rango.

   a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
   b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Autoevaluación y coevaluación 7.1

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ___________________________ Plantel: _________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 7. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aprecié las propiedades fundamentales de las funciones a partir de su representación gráfica. (M2-C2)			
Utilicé modelos matemáticos apropiados para la clasificación de los diferentes tipos de funciones (M1-C3)			
Compartí con mis compañeros la forma que utilicé para obtener y analizar propiedades de las funciones. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

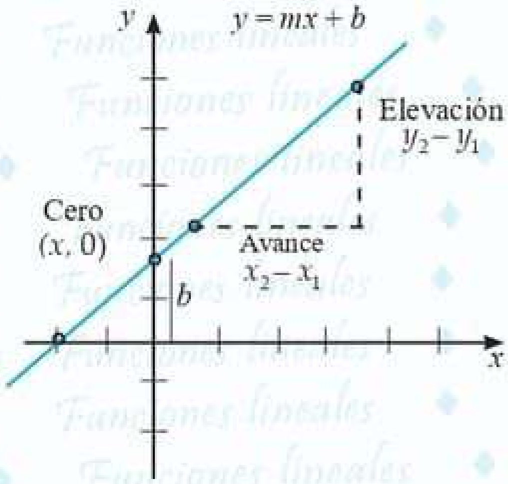
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 7 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Apreció las propiedades fundamentales de las funciones a partir de su representación gráfica. (M2-C2)			
Utilizó modelos matemáticos apropiados para la clasificación de los diferentes tipos de funciones (M1-C3)			
Compartió con sus compañeros la forma que utilizó para obtener y analizar propiedades de las funciones. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones lineales



Progresión de aprendizaje 8

Analiza el efecto de los parámetros en la gráfica de una función lineal, y desarrolla un modelo matemático basado en funciones lineales para resolver un problema del mundo real.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			

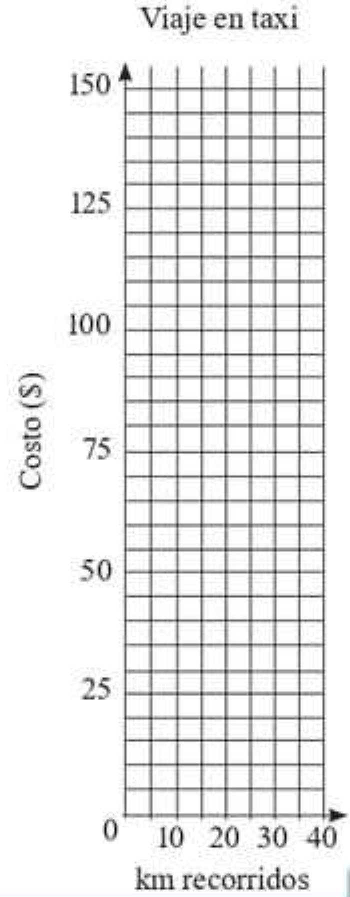
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 8.1

1. Relaciona ambas columnas.

Descripción		Concepto
a) Se caracteriza por su representación gráfica: una línea recta no vertical ni horizontal en el plano cartesiano.	( )	$f(x) = mx + b$
b) ¿Cuál es la forma algebraica de una función lineal?	( )	Función constante (paralela al eje x)
c) ¿Qué representa el valor m en la función lineal $f(x) = mx + b$?	( )	La dirección y la inclinación de la recta
d) ¿Qué sucede si $m = 0$ en la función $f(x) = mx + b$?	( )	Función lineal
e) ¿Qué indica la pendiente en una función lineal?	( )	La pendiente de la recta

Puedes consultar el siguiente enlace para dar respuesta a la evaluación diagnóstica con el uso de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/jvdykuk3

2. En la Ciudad de México, te cobran 40 pesos por subirte a un taxi más 5 pesos por cada kilómetro recorrido. La ecuación que representa esta situación es $y = 5x + 40$.



   a) Completa la tabla y realiza la gráfica:

x(km)	y($)
0	
5	
10	
15	
20	

   b) ¿Qué lugar geométrico está representado al unir los puntos?

   ____

Elementos fundamentales de las funciones lineales

Las funciones lineales se caracterizan por tener una representación gráfica en el plano cartesiano que corresponde a una línea recta. Para graficar una recta, basta con determinar dos puntos que pertenezcan a ella. Su representación algebraica general está dada por la expresión $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales, con $m \neq 0$. Alternativamente, puede escribirse como $y = mx + b$, ya que y representa el valor de la función, es decir, $y = f(x)$. Se denomina "función lineal" debido a que el término mx tiene grado 1. En esta función se tiene que:

- La variable independiente es x.
- La variable dependiente es y.
- La pendiente de la recta, representada por m, determina la inclinación de la línea y describe la tasa de cambio entre y y x.

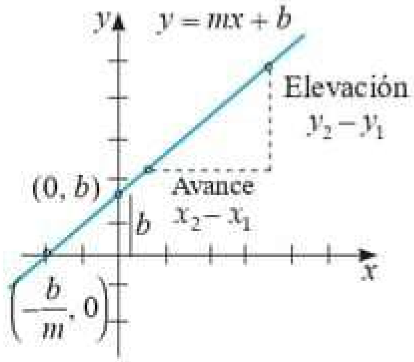
Para determinar la gráfica de una función lineal, se suelen utilizar los puntos donde esta se intercepta con los ejes coordenados:

1. El **punto de intercepción con el eje x** tiene coordenadas $(x, 0)$, donde x se calcula resolviendo la ecuación $mx + b = 0$. Este punto es conocido como el **cero de la función lineal**, y su valor está dado por:
   $x = -\frac{b}{m}$, con $m \neq 0$
2. El punto de intercepción con el eje y tiene coordenadas $(0, y)$. Este punto se obtiene al evaluar la función en $x = 0$, es decir, $y = b$. Este valor, conocido como la ordenada en el origen, está dado por el término b en la ecuación general.

   En resumen:

- El **cero de la función lineal** es el valor de x en el que $y = 0$, y su coordenada es $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$.
- La **ordenada en el origen** es el valor de y cuando $x = 0$, y su coordenada es $(0, b)$.

Por lo tanto, la pendiente m, el cero de la función lineal $\left(x = -\frac{b}{m}\right)$, con $m \neq 0$, y la ordenada en el origen b son elementos clave para comprender y graficar una función lineal.



La figura de la derecha muestra gráficamente una función lineal dada por la expresión $f(x) = mx + b$ donde m, la pendiente de la recta, es la razón entre la elevación y el avance, es decir $m = \frac{elevación}{avance}$; $(x, 0)$ es el cero de la función $f(x)$ y b representa el valor de la ordenada en la que la gráfica corta el eje y.

Ejemplo formativo 8.1

1. Dada la función lineal $2x - 6 - y = 0$, calcula el cero de la función, la ordenada en el origen, determina sus coordenadas y grafícala.

Resolución

Como $2x - 6 - y = 0$, entonces $y = 2x - 6$

Cero de la función lineal $\left(x = -\frac{b}{m}\right)$:

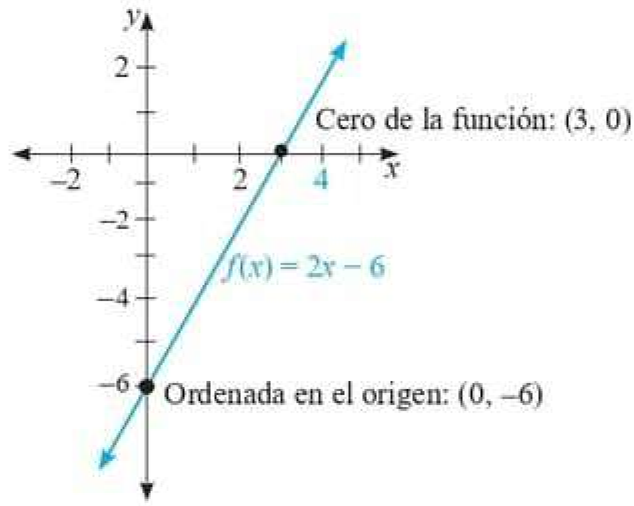
$$x = -\frac{(-6)}{2} = 3$$

Ordenada en el origen: $(y = b)$:

$$y = -6$$

Coordenadas: $(3, 0)$ y $(0, -6)$

La gráfica se observa en la figura de la derecha.



Actividad formativa 8.1

1. Dada las siguientes funciones lineales, identifica el valor de m, calcula el cero de la función, la ordenada en el origen, determina sus coordenadas y grafícala.

   a) $y = -2x + 8$

   b) $x - y = 6$

   c) $3x - 2y = 9$

Cálculo de la pendiente y la ecuación de una recta a partir de dos puntos

Si conocemos dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que están sobre la recta de la gráfica $y = mx + b$, con $m \neq 0$, veamos cómo podemos obtener el valor de la pendiente. Ambos puntos satisfacen la ecuación $y = mx + b$.

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$

A la segunda de estas dos ecuaciones le restamos la primera, y obtenemos:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b)$$
$$y_2 - y_1 = mx_2 + b - mx_1 - b$$
$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Finalmente, de la expresión resultante, $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, despejamos m:

$$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1), \text{ donde } x_2 \neq x_1$$

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se calcula con la fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde $x_2 \neq x_1$.

Ejemplo formativo 8.2

1. Conociendo que una recta en el plano coordenado pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(3, 6)$, determina su pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

   Resolución

   Al conocer dos puntos sobre la recta podemos calcular su pendiente utilizando la fórmula de la pendiente

   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

   Luego, usando el punto $P(1, 2)$ y $m = 2$, sustituyendo en $y = mx + b$, tenemos que $b = 0$.

   Así, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(3, 6)$ es $y = 2x$.

2. Determina la ecuación de la recta que tiene una pendiente de -3 e intercepta al eje y en el punto de ordenada -2.

   Resolución

   Puesto que conoces el valor de la pendiente y el intercepto con y, puedes utilizar la ecuación pendiente-ordenada al origen, $y = mx + b$.

   Sustituyendo $m = -3$ y $b = -2$ en la ecuación $y = mx + b$, obtenemos $y = -3x - 2$.

Actividad formativa 8.2

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(3, 5)$.

2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $P(3, 2)$ y tiene una pendiente de 4.

3. Determina la ecuación de la recta con $m = \frac{1}{2}$ y $b = -5$.

La ecuación general de la recta y su relación con las funciones lineales

La ecuación de la recta en el plano cartesiano puede representarse de diversas formas, siendo una de las más comunes la **ecuación general** de la recta. Esta forma se expresa como: $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son constantes, mientras x y y son variables, respectivamente. Esta ecuación describe una recta en el plano bidimensional y es fundamental en la geometría analítica. Sin embargo, cuando analizamos si esta ecuación define una **función lineal**, debemos considerar ciertas condiciones clave, especialmente la relación entre los coeficientes a y b.

Si $b \neq 0$, podemos despejar la variable y de la ecuación original para obtener la forma estándar de la función lineal:

$$ax + by + c = 0$$
$$by = -ax - c$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Esta ecuación es de la forma $y = mx + n$, donde:

- $m = -\frac{a}{b}$, es la pendiente de la recta.
- $n = -\frac{c}{b}$, es la intersección con el eje y.

Por lo tanto, cuando $b \neq 0$, la ecuación $ax + by + c = 0$ define una función lineal, que tiene la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0$, que es la forma estándar de una función lineal.

Toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, con $x, y \in \mathcal{R}$, a y b no simultáneamente nulos representa una recta en el plano cartesiano

Representación de la recta a partir de la ecuación general

Ejemplo formativo 8.3

1. Representa gráficamente la recta cuya ecuación es $3x + 2y - 6 = 0$. Calcula su pendiente.

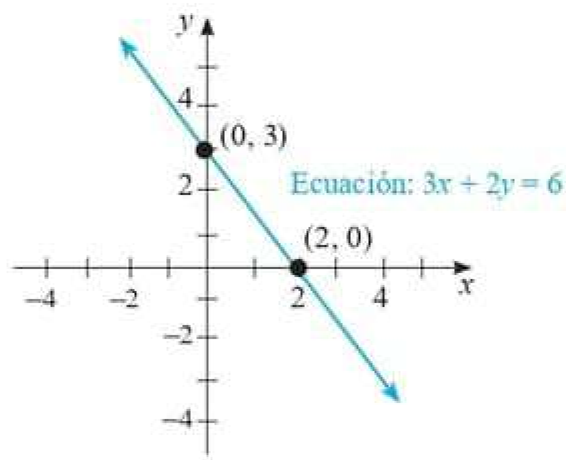
Resolución

Como ya sabes basta determinar dos puntos: el cero de la función y la ordenada en el origen.

Para $x = 0$, $2y - 6 = 0$, luego $y = 3$ y un punto es $(0, 3)$.

Para $y = 0$; $3x - 6 = 0$, luego $x = 2$ y otro punto es $(2, 0)$.

Con estos dos puntos traza la recta buscada, la que se aprecia en la figura de la derecha.



Para calcular la pendiente, si tenemos la ecuación $3x + 2y = 6$, en donde $a = 3$ y $b = 2$, se sustituye en la fórmula: $m = -\frac{a}{b}$, por lo tanto: $m = -\frac{3}{2} = 1.5$

Actividad formativa 8.3

1. Representa en cada caso la recta determinada por la ecuación y calcula su pendiente.

a) $2x + 3y - 12 = 0$

b) $-x - 4y - 2 = 4$

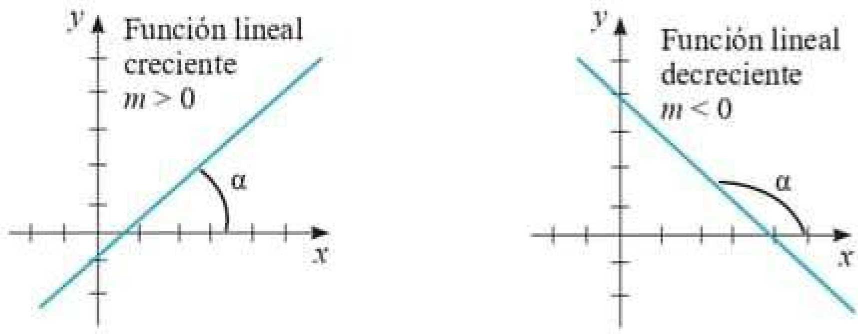
Propiedades del dominio, rango y comportamiento de las funciones lineales

El **dominio** de una función lineal está dado en la recta real, D_f:$(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función lineal está definida para todo $x \in \mathcal{R}$. Por su parte, el **rango** de la función son los números reales, R_f:$(-\infty, +\infty)$; esto significa que $x \in D_f$ tiene una única imagen en el eje y.

Monotonía de una función lineal

La función $y = mx + b$, con $m \neq 0$ es **creciente** si la pendiente es positiva ($m > 0$) y **decreciente**, si la pendiente es negativa ($m < 0$). Además, es una función creciente o decreciente en todo su dominio.

Las gráficas de las funciones lineales creciente y decreciente se muestran en las siguientes figuras.



Si $m = 0$, se tiene que $y = b$, que representa a la función constante.

Ejemplo formativo 8.4

1. Determina si la función representada por $x + y + 3 = 0$ es creciente o decreciente y precisa su dominio.

   Resolución

   Dicha ecuación la puedes escribir en la forma: $y = mx + b$, es decir, $y = -x - 3$; donde $m = -1$ y $b = -3$. Entonces por ser $m < 0$ la función es decreciente y su dominio es el conjunto de los números reales.

Variación de proporcionalidad directa

Un caso particular de una función lineal $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$, se presenta cuando $b = 0$, lo que da lugar a la ecuación $f(x) = mx$, o equivalentemente $y = mx$. Estas funciones representan relaciones de variación directamente proporcional, y su gráfica pasa por el punto (0,0), es decir, el origen de coordenadas. Es importante destacar que, si la pendiente m es sustituida por una constante k, la función toma la forma $y = kx$, donde la razón constante $k = \frac{x}{y}$ se conoce como **constante de proporcionalidad**, la cual representa la tasa de cambio constante entre y y x.

Aplicación de la proporcionalidad directa

Ejemplo formativo 8.5

1. La Ley de Hooke para un resorte establece la relación entre el alargamiento o estiramiento de este y la fuerza aplicada F, la cual, es directamente proporcional a la longitud del desplazamiento (o compresión) del resorte x y está dada por la expresión $F = kx$, donde k es la constante de elasticidad y es específica para cada resorte. Si un resorte se alarga 2 cm al aplicar una fuerza de 8 kg, calcula cuánto se alargará al aplicar una fuerza de 20 kg.

   Resolución

   Calcula la constante de proporcionalidad k; utiliza lo siguiente:

   $F = kx$, donde: $F_1 = 8$ kg, $x_1 = 2$ cm, $k = ?$; por tanto, $k = \frac{F_1}{x_1} = \frac{8}{2} = 4$

Calcula el alargamiento x_2 cuando $F_2 = 20$ kg

$F = kx$ despejando x; $x_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{20}{4} = 5$

Por lo tanto, cuando se aplica una fuerza de 20 kg, el resorte se alargará 5 cm.

Actividad formativa 8.4

1. Vas al mercado y notas que los mangos se venden a \$20 por kilogramo.
   a) Si compraras mangos, ¿cuánto pagarías por 6 kilogramos?
   b) Si en otro mercado por 5 kilogramos se pagan \$90, ¿cuánto cuesta el kilogramo de mango?
   c) ¿En cuál de los mercados comprarías los mangos? ¿Por qué?

Aplicaciones de las funciones lineales en la vida cotidiana

Las funciones lineales tienen múltiples aplicaciones en diversas áreas como la física y la química entre otras ciencias, en la economía, en la vida cotidiana y otras áreas del conocimiento, en diferentes tipos de problemas donde se relacionen dos variables, en particular proporcionalmente. Estas relaciones expresadas a través de sus diversas representaciones permiten interpretar cómo es que una variación en una cantidad influye de manera directa sobre otra.

Asimismo, las funciones lineales se presentan como un lenguaje matemático universal para analizar fenómenos comunes y proponer soluciones prácticas.

Ejemplo formativo 8.6

1. Una compañía telefónica ofrece un plan base mensual por \$80, que incluye 3 GB de datos. Si el usuario consume datos adicionales, se cobran \$20 por cada GB extra. Determina cuánto pagará un usuario que utiliza 7 GB en un mes.

Resolución

Planteamiento:

Costo fijo b: \$80

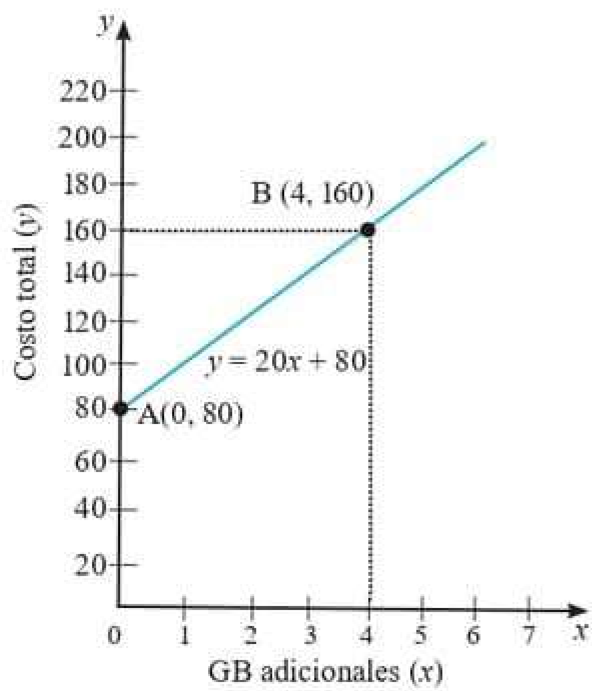
Costo adicional por cada GB extra: $m = 20$

Datos adicionales consumidos: x

Costo total: y

Función lineal: la relación entre el costo total y y los datos adicionales consumidos x está dada por $y = mx + b$; en nuestro caso $y = 20x + 80$.

La gráfica se muestra en la figura de la derecha.



Calcula los GB adicionales consumidos.

El plan incluye 3 GB. Si el usuario consume 7 GB, los GB adicionales son:

$x = 7 - 3 = 4$ GB adicionales

Sustituyendo $x = 4$ en la función

$y = 20\,(4) + 80, \rightarrow y = 80 + 80 \rightarrow y = 160$

Respuesta: el usuario pagará \$160 al final del mes.

Actividad formativa 8.5

1. Una compañía telefónica ofrece un plan base mensual por $ __________, que incluye 3 GB de datos en algunas de las situaciones. Si el usuario consume datos adicionales, se cobran $ _________ por cada GB extra. Determina cuánto pagará un usuario que utiliza _________GB en un mes. Con ayuda de una gráfica cambia (manipula) los valores de la pendiente m que describe cómo cambia el costo total por cada unidad de cambio en los GB adicionales consumidos x. Así mismo, modifica el precio que ofrece el plan base b mensual que incluye 3 GB de datos en algunas situaciones. Utiliza el applet que muestra la gráfica: https://www.geogebra.org/m/uvvmy63b

   a) Situación 1
   Condiciones para la situación: precio del plan con 3 GB incluidos $b = 80$ pesos, precio por GB adicional consumido $m = 20$ pesos. Determina cuánto pagará un usuario que consume 10 GB al mes: ____________________

   b) Situación 2
   Condiciones para la situación: precio del plan con 3 GB incluidos $b = 80$ pesos, precio por GB adicional consumido $m = 10$ pesos. Determina cuánto pagará un usuario que consume 11 GB al mes: ____________________

   c) Situación 3
   Condiciones para la situación: precio del plan con 3 GB incluidos $b = 150$ pesos, precio por GB adicional consumido $m = 10$ pesos. Determina cuánto pagará un usuario que consume 10 GB al mes: ____________________

   d) Situación 4
   Condiciones para la situación: precio del plan con 0 GB incluidos $b = 0$ pesos, precio por GB adicional consumido $m = 100$ pesos. Determina cuánto pagará un usuario que consume 1 GB al mes: ____________________

Ejemplo formativo 8.7

1. Para cumplir ciertos requisitos en la agricultura, por ejemplo, de alcance del regadío, distancias entre las posturas a sembrar, entre algunos, puede necesitarse que las dimensiones de un terreno cumplan determinadas condiciones. Con 48 metros de alambre disponible para cercarlo se requiere marcar un terreno rectangular en el que el largo sea el doble que su ancho. Calcula las dimensiones del terreno a cercar.

   Resolución

   Para abarcar el perímetro del terreno a cercar: 48 metros de alambre

   Ancho del rectángulo: x; largo del rectángulo: $2x$.

   Perímetro del rectángulo de largo $2x$ y ancho x: $P(x) = 2(2x + x)$.

   Dado que el perímetro es 48, se obtiene la ecuación:

$$2(2x + x) = 48$$
$$4x + 2x = 48$$
$$6x = 48$$
$$x = 8$$

   Si el ancho es 8 metros, entonces el largo es 16 metros y se cumple:

$$P(8) = 2(16 + 8) = 48$$

Las dimensiones del rectángulo deben ser 16 metros de largo y 8 metros de ancho.

EVALUACIÓN FORMATIVA 8.1

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta y represéntala gráficamente:
   a) Pasa por el origen de coordenadas y el punto $P(2,4)$.
   b) Pasa por el punto $R(3, 5)$ y tiene pendiente 7/3.
   c) Tiene pendiente –3 e intercepta al eje y en el punto de ordenada –2.
2. Halla las pendientes de los tres lados del triángulo ABC, si: $A(-2, -1)$, $B(3, 2)$ y $C(-8, 9)$.
3. Determina si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes. Fundamenta tu respuesta.
   a) $y = 5x + 1/2$
   b) $y = 3 - x$
   c) $2y = x$
   d) $x/3 - y = 0$
4. Una pequeña empresa familiar fabrica salsas marisqueras. El costo de producción de cada salsa incluye un costo fijo de $25 por materiales iniciales y el alquiler del espacio, más un costo variable de $5 por cada salsa producida.
   a) Escribe la ecuación que representa el costo total de producción (y) en función del número de salsas producidas (x).
   b) ¿Cuánto costará producir 50 salsas? ¿Cuánto costará producir 300?
5. En los comercios es usual que determinados artículos se promocionen con descuentos para estimular que sean adquiridos. En general, el precio P de un producto con aumento o descuento es k veces el precio original x del producto, es decir $P(x) = kx$, función de proporcionalidad directa.

   El precio de una cámara después de descontarle el 20% es de $720, ¿cuál es su precio original?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 8. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Argumenté, valiéndome de graficadores, los procedimientos que permiten solucionar problemas a través de funciones lineales. (M3-C1)			
Aprecié las propiedades fundamentales de las funciones lineales a partir de su representación gráfica. (M2-C2)			
Resolví problemas de diferente índole modelando las situaciones planteadas con funciones lineales. (M4-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

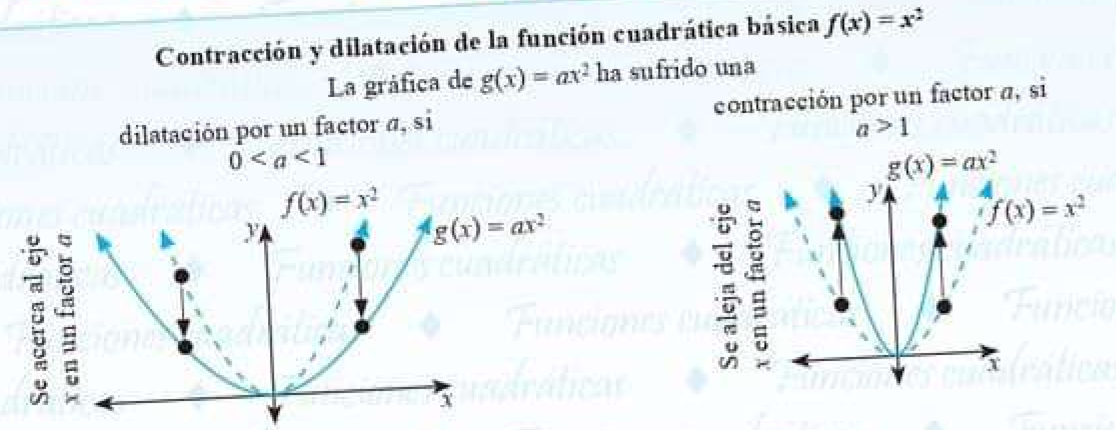
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 8 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Argumentó, valiéndose de graficadores, los procedimientos que permiten solucionar problemas a través de funciones lineales. (M3-C1)			
Apreció las propiedades fundamentales de las funciones lineales a partir de su representación gráfica. (M2-C2)			
Resolvió problemas de diferente índole modelando las situaciones planteadas con funciones lineales. (M4-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones cuadráticas



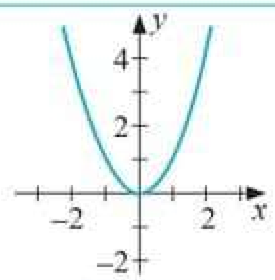
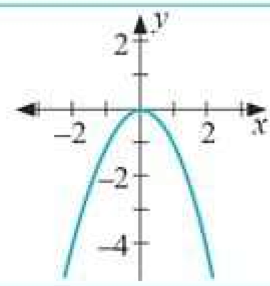
Progresión de aprendizaje 9

Valora cómo los cambios en los coeficientes afectan la forma y posición de la gráfica de una función cuadrática, y diseña una aplicación práctica que utilice las propiedades de las funciones cuadráticas.

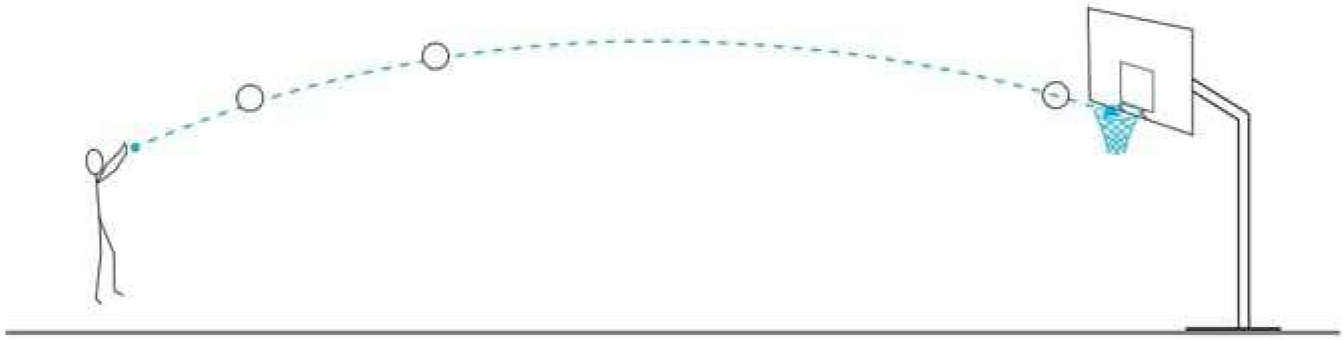
Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 9.1

1. Observa las gráficas y completa la tabla con sus características.

Características		
Dominio		
Rango		
Continuidad		
Concavidad		
Monotonía		
Máximos y mínimos relativos		
Simetría		

Un aficionado de baloncesto toma cuatro fotografías seguidas de un tiro espectacular de su estrella favorita. La figura de abajo muestra los cuatro momentos, justo el instante en que da un salto vertical y las otras muestran la pelota en tres momentos diferentes después de haber sido lanzada hacia la canasta.

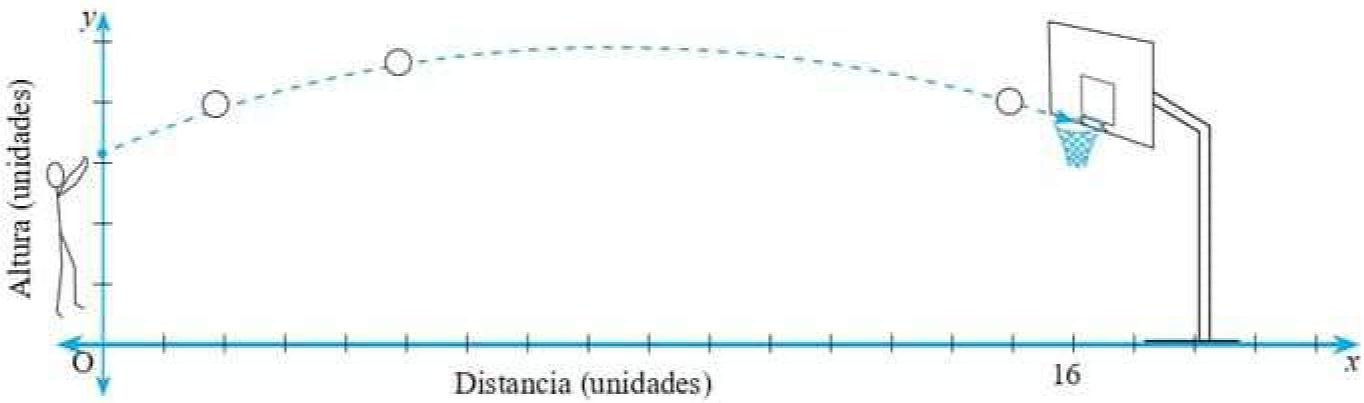


Podemos plantearnos varias interrogantes:

- ¿Qué modelo matemático describe la trayectoria de la pelota?
- ¿Desde qué altura lanzó la pelota?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
- Si no estuviera la canasta, ¿a qué distancia del lanzador chocaría la pelota con el piso?

Función cuadrática

Podemos dar respuesta a estas y otras preguntas, usando la función cuadrática para modelar el tiro parabólico, para ello necesitamos conocer tres puntos cuyas coordenadas son la distancia recorrida por la pelota y su respectiva altura. Estas las podemos determinar superponiendo en la imagen anterior un plano cartesiano, como se muestra en la figura siguiente.



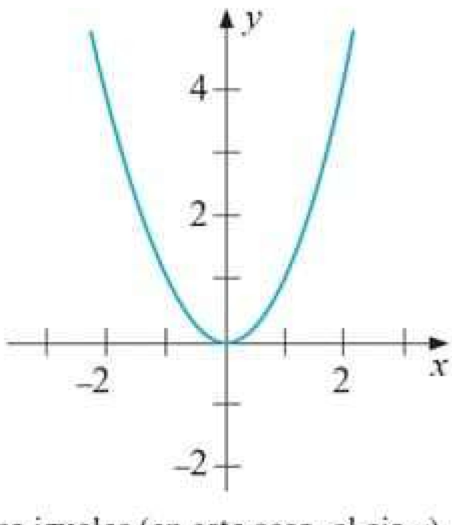
De la primera fotografía, conocemos el punto dónde saltó el jugador, por lo que podemos medir la distancia real hasta la canasta (aproximadamente 16 metros). En la foto, dicha distancia la partimos en 16 partes iguales (una unidad representa un metro) y para la altura, usamos la unidad obtenida. Luego, estimamos la distancia y altura de la pelota en las fotografías. Las coordenadas son: (2, 3.1), (5, 3.7) y (15, 3.3).

Este problema se conoce como "Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos". Para obtenerla, sustituimos cada par ordenado en $y = ax^2 + bx + c$, luego, resolvemos el sistema de ecuaciones de 3×3 y calculamos los coeficientes a, b y c, mismos que sustituimos en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, pues recordemos que $y = f(x)$.

Sistema de 3×3	Solución aproximada	Función cuadrática
$\begin{cases} 3.1 = 4a + 2b + c \\ 3.7 = 25a + 5b + c \\ 3.3 = 225a + 15b + c \end{cases}$	$a = -0.0184$ $b = 0.33$ $c = 2.52$	$f(x) = -0.0184x^2 + 0.33x + 2.52$

Con la función obtenida podemos responder las preguntas planteadas.

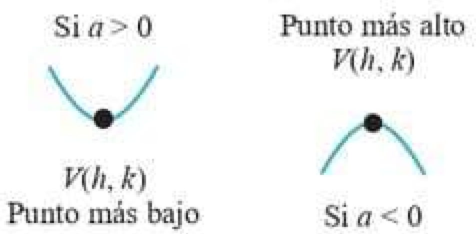
En Pensamiento Matemático II estudiaste que las **funciones cuadráticas**, son funciones polinómicas que se caracterizan por tener la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes, denominados coeficientes de la ecuación, y $a \neq 0$. Estas funciones toman su nombre del término cuadrático ax^2 presente en su expresión, el cual es el responsable de generar la curvatura (parábola) en la gráfica de esta.



Esta función se caracteriza por ser un **polinomio de segundo grado**, que tiene como **función base** a $f(x) = x^2$; y es conocida como la **función cuadrática básica**. Su gráfica se muestra en la figura de la derecha.

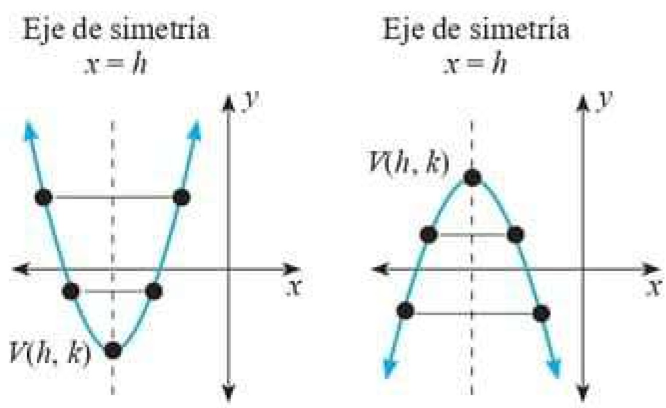
El **dominio** de esta función es la recta real, D_f:$(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función cuadrática básica está definida para todo $x \in \mathcal{R}$.

Por su parte, el **rango** (o también **recorrido**) de la función es $y \geq 0$, R_f:$[0, +\infty)$; esto quiere decir que cada $x \in D_f$ tiene una imagen en la parte no negativa del eje y. Tiene una propiedad interesante, la simetría; el eje de simetría es una recta vertical que divide la función en dos partes iguales (en este caso, el eje y). Esta función se caracteriza por ser **continua en todo su dominio**, esto quiere decir que para hacer su gráfica solo se requiere de un trazo, ver la gráfica de arriba.



Siempre que graficamos una función cuadrática aparece una de las dos formas como en la siguiente figura.

Nota que si $a > 0$, debemos identificar las coordenadas del punto más bajo de la parábola o si $a < 0$, las coordenadas del punto más alto. Dicho punto recibe el nombre de vértice y se denota por $V(h, k)$.



Observa las gráficas a la derecha. Estas tienen puntos simétricos respecto a una recta vertical que pasa por el vértice $V(h, k)$. La ecuación de dicha recta es $x = h$ y se llama eje de simetría.

Contracción y dilatación de una función cuadrática básica $f(x) = x^2$

A la función cuadrática $f(x) = x^2$ la llamamos función cuadrática básica, debido a que el resto de las funciones cuadráticas son transformaciones de esta. Una transformación de esta función forma una familia de funciones cuyas gráficas muestran una o más características similares.

Analizaremos la familia de gráficas de la función $g(x) = ax^2$, con $a \neq 0$. Observa que esta es una transformación de $f(x) = x^2$. Se sugiere usar las aplicaciones Desmos o GeoGebra para analizar el efecto que surte el valor numérico de a en la gráfica de $f(x) = x^2$.

La contracción, dilatación o reflexión de $f(x) = x^2$, son conceptos que permiten describir la gráfica de la función después de haber sufrido una transformación de la forma $g(x) = ax^2$.

QR 9.1. Contracción de la función cuadrática básica.
Fuente: Parzibyte 2025.

La **contracción** (se estrecha) de la gráfica de $f(x) = x^2$, es una transformación que mantiene el vértice de la gráfica de f fijo, pero la hace más angosta, como consecuencia de multiplicar cada coordenada y de cada par ordenado (x, y) de f por un valor de a, tal que $a > 1$.

En el código QR 9.1 puedes apreciar cómo se contrae la gráfica para diferentes valores de $a > 1$.

La **dilatación** (se ensancha) de la gráfica de $f(x) = x^2$, es una transformación que mantiene el vértice de la gráfica de f fijo, pero la hace más ancha, como consecuencia de multiplicar cada coordenada y de cada par ordenado (x, y) de f por un valor de a, tal que $0 < a < 1$.

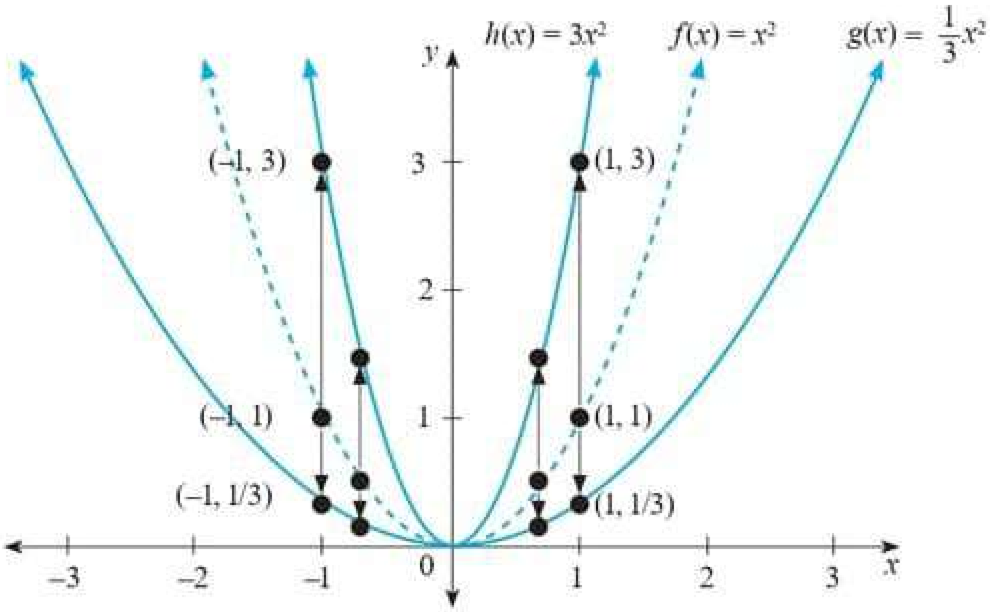
En el código QR 9.2 puedes apreciar cómo se dilata la gráfica para diferentes valores de a, $0 < a < 1$.

QR 9.2. Dilatación de la función cuadrática básica.
Fuente: Parzibyte 2025.

Ejemplo formativo 9.1

1. Grafica las funciones $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ y $h(x) = 3x^2$ junto con la función cuadrática básica $f(x) = x^2$ y describe, cómo la gráfica de cada una es una transformación de la gráfica de la función básica.

Resolución



Tomando como referencia la gráfica de f, en la figura de la izquierda:

- La gráfica de h es más angosta que la de f. Cada par ordenado (x, y) de f se transforma en el par $(x, 3y)$.
- La gráfica de g es más ancha que la de f. Cada par ordenado (x, y) de f se transforma en el par ordenado $(x, \frac{1}{3}y)$.

A cada punto de la gráfica $f(x) = x^2$ le corresponde un punto directamente abajo en la gráfica de $g(x) = \frac{x^2}{3}$. Para cada x, la coordenada y en g es exactamente la tercera parte de la coordenada y correspondiente en f. Es decir, la gráfica de g la obtenemos por una dilatación en un factor de $\frac{1}{3}$ de la gráfica de $f(x) = x^2$.

A cada punto de la gráfica $f(x) = x^2$ le corresponde un punto directamente arriba en la gráfica de $h(x) = 3x^2$. Para cada x, la coordenada y en g es exactamente el triple de la coordenada y correspondiente en f. Es decir, la gráfica de h la obtenemos por una contracción en un factor de 3 de la gráfica de $f(x) = x^2$.

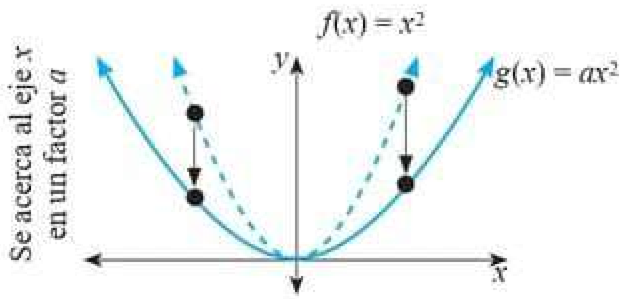
Tengamos en cuenta que la operación que realizamos para la dilatación de la gráfica de $f(x) = x^2$ es la multiplicación por un valor de a, tal que $0 < a < 1$ y para la contracción, por un valor de $a > 1$. Dos características de la familia de funciones cuadráticas $g(x) = ax^2$, es que todas tienen el mismo vértice y abren hacia arriba, con la diferencia de que, conforme a disminuye, la forma de la gráfica se hace más ancha y conforme el valor de a aumenta, se hace más angosta (puedes utilizar también la aplicación Desmos para verificarlo).

Contracción y dilatación de la función cuadrática básica $f(x) = x^2$

La gráfica de $g(x) = ax^2$ ha sufrido una

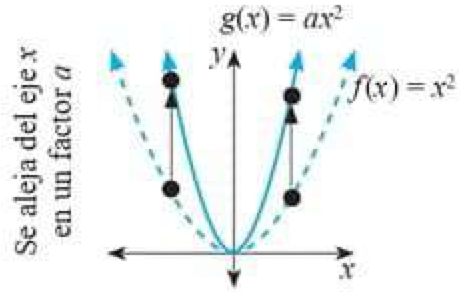
dilatación por un factor a, si

$0 < a < 1$



contracción por un factor a, si

$a > 1$



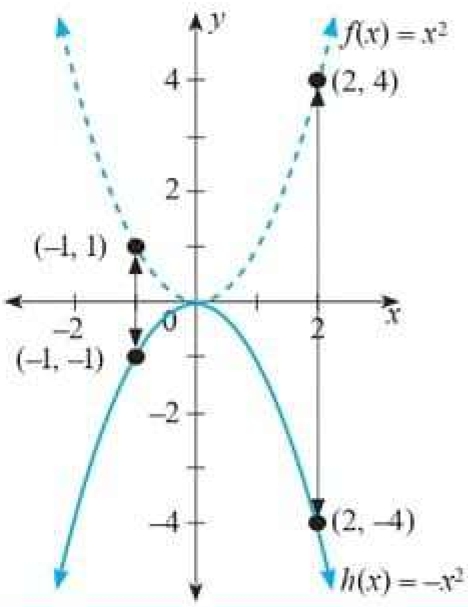
Hemos analizado el comportamiento de la familia de gráficas $g(x) = ax^2$, con $a > 0$ que abren hacia arriba.

Reflexión de la función $f(x) = x^2$ sobre el eje x

La **reflexión** de una gráfica de la forma $g(x) = ax^2$, con $a > 0$ sobre el eje x, es una transformación que mantiene el mismo vértice y forma de la gráfica de g, pero cada coordenada y de cada par ordenado (x, y) de g, es sustituida por su opuesto $-y$.

Ejemplo formativo 9.2

1. Grafica las funciones $f(x) = x^2$ y $h(x) = -x^2$. Describe cómo la gráfica de $h(x) = -x^2$ es una transformación de la gráfica de la función básica.



Resolución

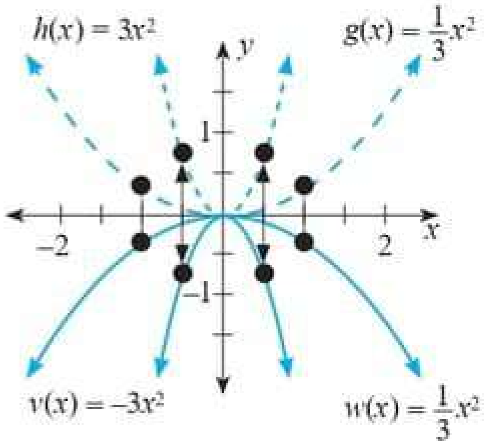
Observa en la gráfica de la izquierda que h es una reflexión de la gráfica de f sobre el eje x, debido a lo siguiente:

Las coordenadas del par ordenado $(2, 4)$ de f las determinamos elevando $x = 2$ al cuadrado y obtenemos su valor correspondiente $y = 4$. Para el par ordenado $(2, -4)$ de h, elevamos $x = 2$ al cuadrado, luego, encontramos el opuesto de 4 y obtenemos su valor correspondiente $y = -4$.

Esto da una correspondencia entre los pares ordenados de f y los de h. Por lo que, para cada par ordenado en la gráfica de f hay un par ordenado correspondiente directamente debajo de él en la gráfica de h, y estos pares ordenados están a la misma distancia del eje x. Cada para ordenado (x, y) de f se transforma en el par $(x, -y)$.

QR 9.3. Reflexión de la función cuadrática básica.
Fuente: Parzibyte 2025.

En el código QR 9.3 puedes apreciar la transformación correspondiente a la reflexión de la función cuadrática $f(x) = x^2$.



Si reflejamos ahora las funciones $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ y $h(x) = 3x^2$ sobre el eje x, obtenemos las funciones $w(x) = -\frac{1}{3}x^2$ y $v(x) = -3x^2$, respectivamente, como se muestra en la figura siguiente.

Para cada par ordenado (x, y) en la gráfica de g, hay un par ordenado $(x, -y)$ directamente debajo de él en la gráfica de w, y estos pares ordenados, están a la misma distancia del eje x. La gráfica de w es una reflexión de la grafica de g sobre el eje x.

De la misma forma, la gráfica de v es una reflexión de la gráfica de h sobre el eje x (en la aplicación Desmos, grafica $g(x) = ax^2$ y $h(x) = -ax^2$, para $a > 0$ y contrasta los gráficos.

Hemos visto que en la función $g(x) = ax^2$, con $a > 0$, el valor de a indica cómo la gráfica g difiere de la gráfica de la función básica $f(x) = x^2$, es decir:

- Si $0 < a < 1$, la gráfica de g es una dilatación de la gráfica de f en un factor a.
- Si $a > 1$, la gráfica de g es una contracción de la gráfica de f en un factor a.

Por último, la gráfica de $h(x) = -ax^2$ es una reflexión sobre el eje x de la gráfica de $g(x) = ax^2$.

Ejemplo formativo 9.3

1. Determina una función cuadrática de la forma $g(x) = ax^2$, si su gráfica pasa por el punto $A(1, 3)$.

   Resolución

   Como $A(1, 3)$ pertenece al gráfico de $g(x) = ax^2$, se cumple que $3 = a(1)^2$ de donde $a = 3$, luego, la función es $g(x) = 3x^2$.

Actividad formativa 9.1

1. Grafica cada una de las siguientes funciones mediante el uso de la aplicación Desmos. Determina su dominio y rango.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = -x^2$		
$h(x) = 5x^2$		
$f(x) = x^2$		
$w(x) = -0.2x^2$		
$r(x) = -10x^2$		

2. Determina una función cuadrática de la forma $g(x) = ax^2$, cuyo gráfico pasa por el punto:

   a) $A(1, 2)$
   b) $B(-3, -3)$
   c) $C\left(\sqrt{5}, 4\right)$
   d) $D(2, -3)$

3. Sea la función $f(x) = -\frac{x^2}{4}$.

   a) Traza el gráfico de la función para $-4 \leq x \leq 4$.
   b) Determina el conjunto imagen (rango).
   c) Analiza la monotonía para $-4 \leq x \leq 1$.

Traslación horizontal y vertical de la función cuadrática

Comprender la familia de gráficas de la función cuadrática básica $f(x) = x^2$, facilita su representación y exploración gráfica, como vimos, al aplicarle la transformación $g(x) = ax^2$. A continuación, veremos dos transformaciones, la traslación vertical $g(x) = x^2 + k$ y la traslación horizontal $g(x) = (x - h)^2 + k$, con $V(h, k)$.

Traslaciones verticales

El efecto de la transformación vertical $g(x) = x^2 + k$, es que traslada la gráfica de la función cuadrática básica en la dirección del eje y, según el valor de k:

Si $k > 0$, la gráfica de f se traslada k unidades hacia arriba.

Si $k < 0$, la gráfica de f se traslada $|k|$ unidades hacia abajo.

Ejemplo formativo 9.4

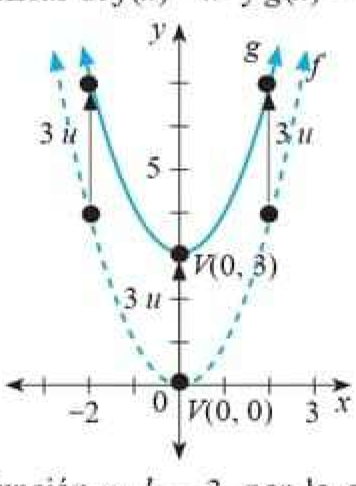
1. Grafica las siguientes funciones junto con la función cuadrática básica. Describe cómo cada una de las gráficas es una transformación de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

   a) $g(x) = x^2 + 3$

   b) $g(x) = x^2 - 4$

Resolución

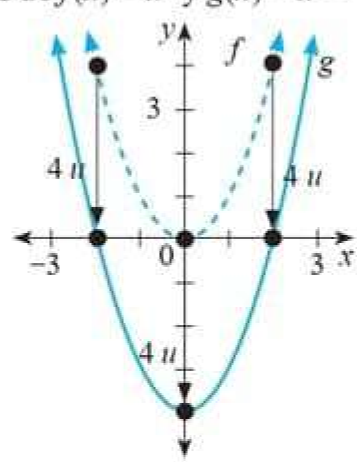
a) Gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$



De la función g, $k = 3$, por lo que cada punto (x, y) de la gráfica de f se traslada tres unidades hacia arriba.

Cada par ordenado (x, y) de f se transforma en el par ordenado $(x, y + 3)$.

b) Gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4$



Observa que $g(x) = x^2 - 4 = x^2 + (-4)$. De la función g, $k = -4$, por lo que cada punto (x, y) de la gráfica de f se traslada cuatro unidades hacia abajo.

Cada par ordenado (x, y) de f se transforma en el par ordenado $(x, y - 4)$.

QR 9.4. Reflexión de la función cuadrática básica.
Fuente: Parzibyte 2025.

Así pues, una traslación vertical solo afecta la posición vertical de la gráfica, manteniendo su forma y tamaño original, lo cual puedes observar en el QR 9.4, para diferentes valores de k.

Traslaciones horizontales

El efecto de la transformación horizontal $g(x) = (x - h)^2$, es que traslada la gráfica de la función cuadrática básica en la dirección del eje x, según el valor de h:

- Si $h > 0$, la gráfica de f se traslada h unidades hacia la derecha.
- Si $h < 0$, la gráfica de f se traslada $|h|$ unidades hacia la izquierda.

Ejemplo formativo 9.5

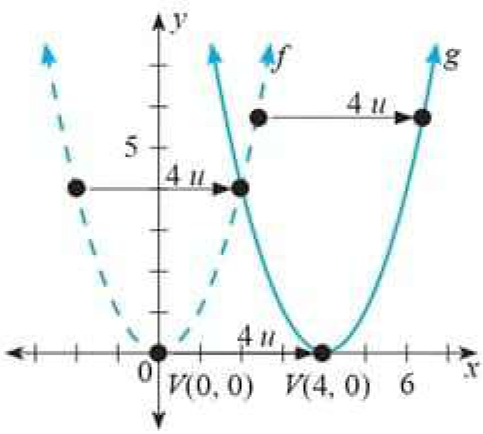
1. Grafica las siguientes funciones junto con la función cuadrática básica. Describe cómo cada una de las gráficas es una transformación de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

   a) $g(x) = (x - 4)^2$

   b) $g(x) = (x + 2)^2$

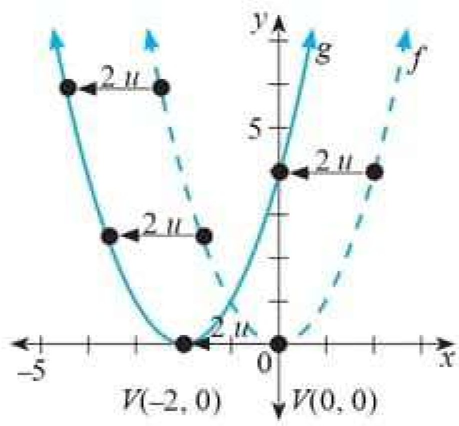
Resolución

a) Gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 4)^2$



De la función g, $h = 4$, por lo que cada punto (x, y) de la gráfica de f se traslada cuatro unidades hacia la derecha. Es decir, cada par ordenado (x, y) de f se transforma en el par ordenado $(x + 4, y)$.

b) Gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x + 2)^2$



$g(x) = (x + 2)^2 = (x - (-2))^2$.

De la función g, $h = -2$, por lo que cada punto (x, y) de la gráfica de f se traslada dos unidades hacia la izquierda. Es decir, cada par ordenado (x, y) de f se transforma en el par ordenado $(x - 2, y)$.

En resumen, una traslación horizontal es el desplazamiento de la gráfica a lo largo del eje x, hacia la derecha o izquierda, sin modificar su forma original. Es decir, se realiza sumando o restando el valor de una constante h a la variable independiente x dentro de la función. En el código QR 9.5 puedes observar esta transformación para diferentes valores de h.

QR 9.5. Traslación de la función cuadrática. *Fuente:* Parzibyte 2025.

Combinando transformaciones

Ahora veremos la transformación $g(x) = a(x - h)^2 + k$, donde h y k son las coordenadas del vértice $V(h, k)$ de la parábola. Vamos a graficar una función que contiene más de una transformación, para ello te sugerimos utilizar la siguiente estrategia.

Estrategia para graficar la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$

Para graficar $g(x) = a(x - h)^2 + k$, inicia con la gráfica de $g(x) = x^2$ y luego, realiza las transformaciones en el siguiente orden:

1. Traslación horizontal (a la derecha si $h > 0$ o a la izquierda si $h < 0$)
2. Contracción o dilatación (dilatación si $0 < a < 1$ o contracción si $a > 1$)
3. Reflexión sobre el eje x (si a es negativo)
4. Traslación vertical (hacia arriba si $k > 0$ o hacia abajo si $k < 0$)

Ten en cuenta que no importa el orden en el que apliquemos la reflexión sobre el eje x, la contracción o la dilatación, lo que importa, es que apliquemos al último la traslación vertical.

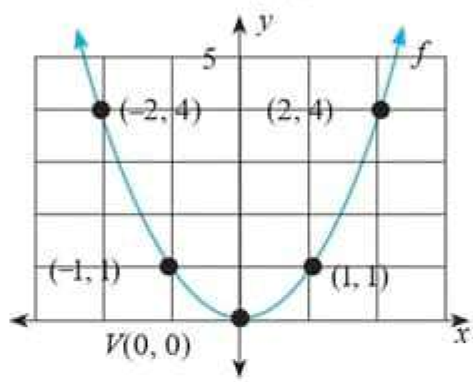
Por ejemplo, si la función $f(x) = x^2$ es reflejada sobre el eje x y luego trasladada tres unidades hacia arriba, la ecuación es $g(x) = -x^2 + 3$.

Pero si la gráfica de la función $f(x) = x^2$ es trasladada tres unidades hacia arriba, y luego reflejada sobre el eje x, la ecuación es $g(x) = -(x^2 + 3) = -x^2 - 3$. Como vimos, un cambio en el orden de aplicación de las transformaciones produce ecuaciones diferentes.

Para determinar la ecuación de la función cuadrática y sus propiedades, es suficiente conocer tres de los puntos por donde esta pasa, pero, para efectos de graficar una función de la forma $g(x) = a(x - h)^2 + k$ aplicando a la gráfica de $f(x) = x^2$ las transformaciones vistas, utilizamos cinco puntos de la función cuadrática básica, que se ilustran en la gráfica de la derecha.

A continuación, veamos cómo relacionar las transformaciones con las coordenadas de los pares ordenados (x, y) de f y el efecto que estas surten en ellos para obtener los pares ordenados de g.

Gráfica de $f(x) = x^2$

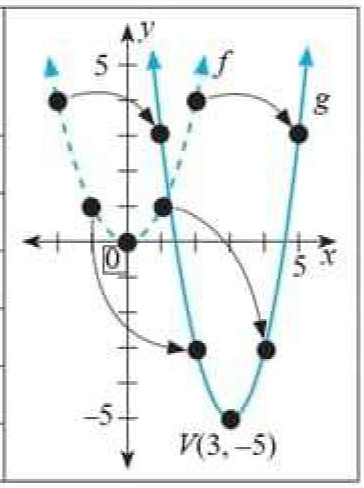


Ejemplo formativo 9.6

1. Grafica la función $g(x) = 2(x - 3)^2 - 5$ aplicando transformaciones a la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

Resolución

Coordenadas de la gráfica de f	Traslación horizontal a la derecha $h = 3$	Contracción $a = 2$	Traslación vertical hacia abajo $k = -5$	Coordenadas de la gráfica de g
(x, y)	$(x + h, y)$	$(x + h, ay)$	$(x + h, ay + k)$	$(x + h, ay + k)$
$V(0, 0)$	$V(3, 0)$	$V(3, 0)$	$V(3, 0 - 5)$	$V(3, -5)$
$(1, 1)$	$(4, 1)$	$(4, 2)$	$(4, 2 - 5)$	$(4, -3)$
$(-1, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 2 - 5)$	$(2, -3)$
$(2, 4)$	$(5, 4)$	$(5, 8)$	$(5, 8 - 5)$	$(5, 3)$
$(-2, 4)$	$(1, 4)$	$(1, 8)$	$(1, 8 - 5)$	$(1, 3)$



La gráfica de $f(x) = x^2$ se traslada tres unidades a la derecha, se contrae en un factor de 2 y se traslada cinco unidades hacia abajo, como se muestra en la gráfica anterior.

Actividad formativa 9.2

1. Grafica la función $g(x) = -(x + 4)^2 + 3$ aplicando transformaciones a la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Describe cómo cada una de las gráficas es una transformación de la gráfica de la función cuadrática básica.

   Resolución

   $g(x) = -(x + 4)^2 + 3 = -(x - (-4))^2 + 3$

Coordenadas de la gráfica de f	Traslación horizontal a la izquierda $h = -4$	Reflexión en el eje x $a = -1$	Traslación vertical hacia arriba $k = 3$	Coordenadas de la gráfica de g
(x, y)	$(x + h, y)$	$(x + h, ay)$	$(x + h, ay + k)$	$(x + h, ay + k)$
V(0,0)				
(1,1)				
(−1,1)				
(2,4)				
(−2,4)				

Gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -(x + 4)^2 + 3$

La gráfica de $f(x) = x^2$ se traslada _____ unidades a la __________, se refleja sobre el eje x y se traslada _____ unidades hacia _________.

Actividad formativa 9.3

1. Gráfica la función $g(x) = (x - 4)^2 + 1$ aplicando transformaciones a la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Describe cómo cada una de las gráficas es una transformación de la gráfica de la función cuadrática básica.

   Resolución

   $a =$ ____, $h =$ ____ y $k =$ ____

Coordenadas de la gráfica de f	Coordenadas de la gráfica de g
(x, y)	$(x + h, ay + k)$
$V(0, 0)$	
(1, 1)	
(−1, 1)	
(2, 4)	
(−2, 4)	

Gráfica las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 4)^2 + 1$

La gráfica de $f(x) = x^2$ se traslada ____ unidades a la __________ y ____ unidad hacia ________.

Actividad formativa 9.4

1. Grafica cada función aplicando transformaciones a la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Describe cómo cada una de las gráficas es una transformación de la gráfica de la función cuadrática básica.

   a) $g(x) = -2x^2 + 7$

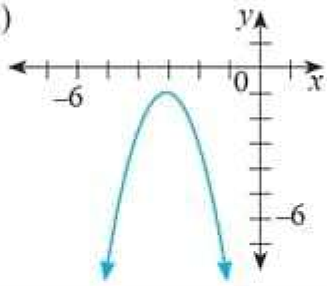
   b) $g(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2$

◇ EVALUACIÓN FORMATIVA 9.1

1. De las funciones siguientes, identifica cuál responde a cada una de las gráficas.

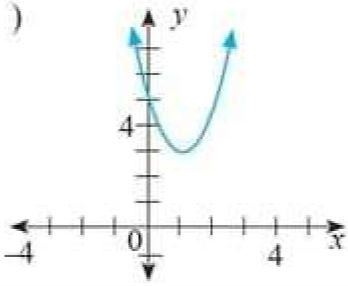
a) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

( )



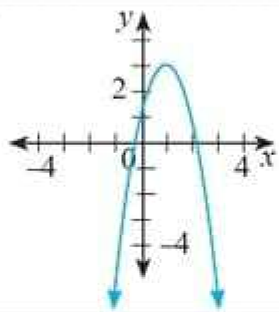
b) $g(x) = -2(x + 3)^2 - 1$

( )



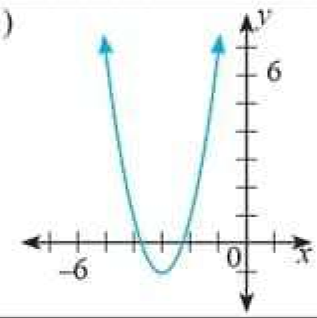
c) $h(x) = 2(x + 3)^2 - 1$

( )



d) $w(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

( )



2. Grafica cada función aplicando transformaciones a la gráfica de $f(x) = x^2$.

   a) $h(x) = x^2 - 3$

   b) $g(x) = (x - 4)^2$

   c) $h(x) = (x - 1)^2 + 2$

   d) $w(x) = -(x + 2)^2 - 1$

   e) $g(x) = 2(x - 2)^2 - 1$

   f) $w(x) = -0.5(x + 2)^2 + 2$

3. Dada la función $g(x) = -x^2 - 4x - 5$:

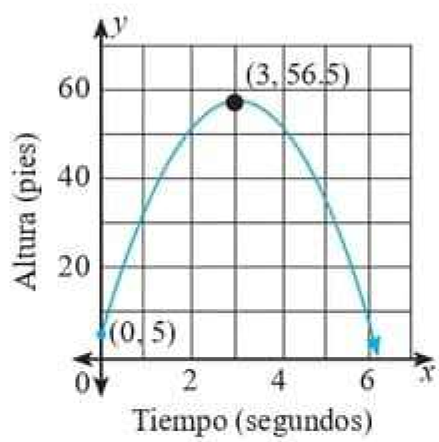
   a) Exprésala en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

   b) Precisa el dominio y rango de la función f.

   c) Determina el vértice y las intersecciones con los ejes coordenados.

   d) Gráficala aplicando transformaciones a la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

4. Se lanzan dos bolas al aire. La trayectoria de la primera bola se representa en el gráfico de la derecha. La segunda bola se lanza 1.5 pies más alto que la primera bola y después de tres segundos alcanza su altura máxima 5 pies más abajo que la primera bola. Escribe una ecuación para la trayectoria de la segunda bola. ¿Las bolas golpean el suelo al mismo tiempo? Si es así, ¿cuánto tiempo duran las bolas en el aire? Si no es así, ¿qué pelota golpea primero el suelo? Explica tu razonamiento.



AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 9. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identifiqué propiedades de la función cuadrática a partir de su representación con graficadores. (M3-C1)			
Verifiqué como los cambios en los coeficientes afectan la forma y posición de la gráfica de una función cuadrática. (M3-C2)			
Determiné diferentes vías de solucionar problemas aplicando las funciones cuadráticas. (M4-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

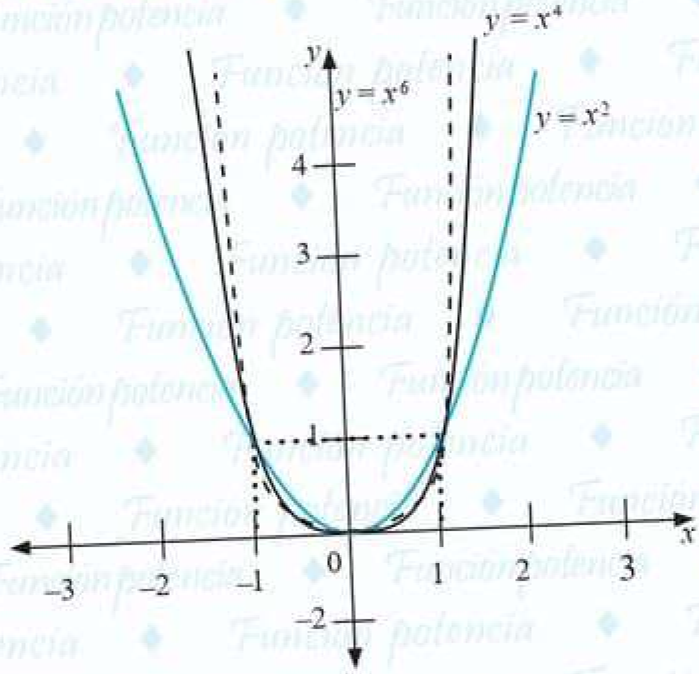
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 9 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Identificó propiedades de la función cuadrática a partir de su representación con graficadores. (M3-C1)			
Verificó como los cambios en los coeficientes afectan la forma y posición de la gráfica de una función cuadrática. (M3-C2)			
Determinó diferentes vías de solucionar problemas aplicando las funciones cuadráticas. (M4-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Función potencia



Progresión de aprendizaje 10

Analiza el comportamiento de las funciones potencia para diferentes exponentes, y crea un conjunto de problemas que demuestren la aplicación de las funciones potencia en fenómenos naturales y sociales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 10.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. Si $f(x) = x^3$, entonces $f(-3)$ es igual a:
   a) -9
   b) 27
   c) -27
2. Dada la función $f(x) = x^2$, $f(x + 1)$ es igual a:
   a) $x^2 + 1$
   b) $2x + 1$
   c) $x^2 + 2x + 1$

3. Dada la función $f(x) = -x^2$ su representación gráfica es:

a) Una parábola

b) una recta

c) Ninguna de las dos anteriores

4. La población de una bacteria crece por horas según la función $P(t) = 3t^4$. Después de dos horas la población de la bacteria es:

a) 24

b) 48

c) 36

En una fábrica de bolas navideñas de diferentes tamaños quieren determinar las dimensiones de las cajas de embalaje de las bolas que fabrican, para lo cual requieren precisar el volumen que abarca cada tipo de bola navideña.

El volumen que abarca un globo esférico está en dependencia del radio de la esfera. Como conoces, el volumen de una esfera está dado por la expresión $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. En la medida que el radio sea mayor o menor el volumen de la esfera también crece o decrece, es decir el volumen es dependiente del valor del radio.

Función potencia

La situación anterior es representativa de una clase específica de funciones, la función potencia. Anteriormente has estudiado la función cuadrática $f(x) = x^2$ y la función cúbica $f(x) = x^3$ que son casos específicos de la función potencia. Veamos ahora su expresión más general.

Función potencia

La **función potencia** es una función de la forma $f(x) = kx^n$, donde x es la variable independiente, k y n son números reales diferentes de cero, siendo n el exponente.

Son también ejemplos de funciones potencia las siguientes:

$$f(x) = 3x^4, f(x) = \frac{3}{5}x^{-3}, f(x) = -2x^{\frac{3}{4}}.$$

Las funciones potencia están presentes en diferentes contextos, así como en diversas leyes y fórmulas científicas. Por ejemplo:

- **Área de un círculo:** $A(r) = \pi r^2$, donde $k = \pi$ y el exponente es 2.
- **Volumen de una esfera:** $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde $k = \frac{4}{3}\pi$ y el exponente es 3.
- El **volumen V de un gas** a temperatura constante, es inversamente proporcional a la presión p, lo cual se escribe $V(p) = \frac{k}{p} = kp^{-1}$, donde k es una constante, p la variable y el exponente es -1.
- **Ley de la gravitación universal:** dados dos cuerpos de masa m_1 y m_2, entonces la fuerza de gravedad entre ellos está dada por $F(r) = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde G es la constante de gravitación universal, r la variable y -2 el exponente.
- **Ley de Hooke:** la fuerza ejercida por un resorte es proporcional a la distancia que se estira o comprime. $F(x) = kx$, donde F es la fuerza, k es la constante de elasticidad del resorte, x es la distancia. En este caso el exponente es 1.

Si bien hemos considerado en la definición de la función potencia que el exponente es un número real, vamos a concentrarnos en los casos en que el exponente es un número entero, para estudiar sus propiedades. El dominio de estas funciones y su rango, así como otras propiedades dependen del valor del exponente y para ello vamos a considerar las diferentes posibilidades para el exponente y auxiliarnos de la representación gráfica correspondiente cuando el factor $k = 1$, es decir para la función $f(x) = x^n$.

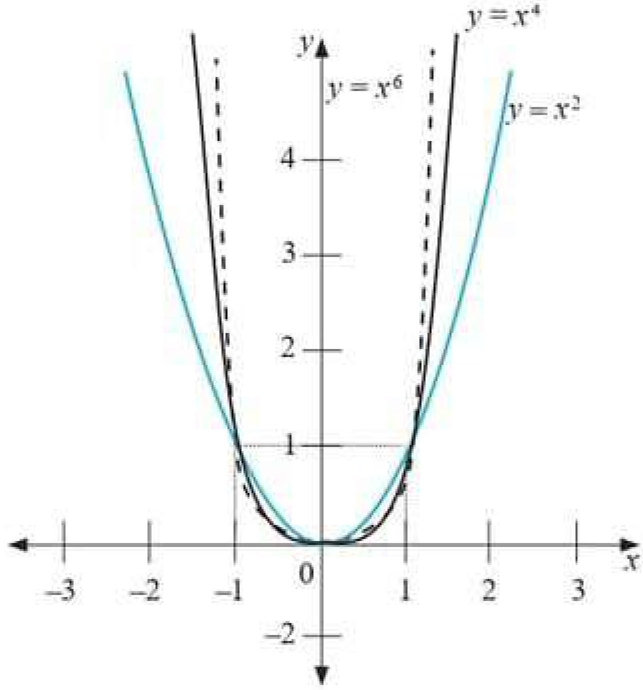
Representación gráfica y propiedades de las funciones potencia

Función potencia de exponente entero positivo par

Este es el caso de las funciones

$$f(x) = x^2, f(x) = x^4, f(x) = x^6, \ldots$$

cuyas gráficas, de las tres primeras, aparecen en la figura de la derecha.



De la figura, independientemente del valor del exponente, se pueden apreciar las siguientes propiedades:

- El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales $\Re$.
- El rango de estas funciones es el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo $[0, +\infty)$.
- Son funciones pares, es decir $f(x) = f(-x)$; por tanto, son simétricas respecto al eje y.
- Tienen como único cero $x = 0$, forma de "U" y en la medida que el exponente aumenta los valores de $f(x)$ se acercan más al eje x, es decir la curva se hace más "aplastada" y la "U" se hace más estrecha.
- Son decrecientes en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crecientes en $(0, +\infty)$.
- En estos casos, en que $k = 1$, todas contienen los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

Cuando se considera $f(x) = kx^n$ con $0 < k < 1$, la gráfica de la función se expande, haciéndose más amplia (se aleja del eje y). Si $k > 1$, la gráfica de la función se contrae, haciéndose más estrecha (se acerca al eje y).

Ejemplo formativo 10.1

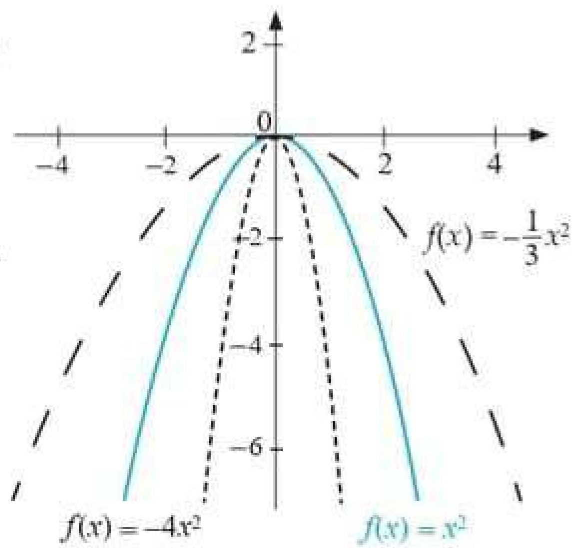
1. Análisis de las propiedades de la función $f(x) = kx^n$, con n par y k negativo.

Resolución

Para ello analizaremos casos específicos.

La figura de la derecha muestra la representación gráfica de las funciones

$$f(x) = -x^2,$$
$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2,$$
$$f(x) = -4x^2.$$



Respecto a las propiedades se puede inferir que:

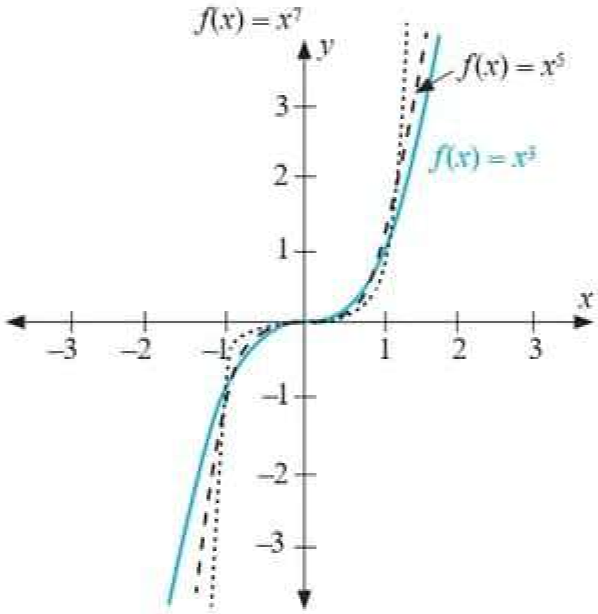
- El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales $\Re$.
- El rango de estas funciones es el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo $(-\infty, 0]$.
- Son funciones pares, es decir, $f(x) = f(-x)$; por tanto, son simétricas respecto al eje y.
- Tienen como único cero $x = 0$ y forma de "U" invertida.
- Son crecientes en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrecientes en $(0, +\infty)$
- En estos casos, en que $k = -1$, todas contienen los puntos $(-1, -1)$ y $(1, -1)$.
- Cuando se considera $f(x) = kx^n$ con $-1 < k < 0$, la gráfica de la función se expande, haciéndose más amplia (se aleja del eje y). Si $k < -1$, la gráfica de la función se contrae, haciéndose más estrecha (se acerca al eje y).

Función potencia de exponente entero positivo impar

Este es el caso de las funciones

$f(x) = x^3, f(x) = x^5, f(x) = x^7, \ldots$

cuyas gráficas, de las tres primeras, aparecen en la figura de la derecha.



De la figura, independientemente del valor del exponente, se pueden apreciar las siguientes propiedades:

- El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales $\Re$.
- El rango de estas funciones es el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo $(-\infty, +\infty)$.
- Son funciones impares, es decir, $f(x) = -f(-x)$; por tanto, son simétricas respecto al origen del sistema de coordenadas.
- Tienen como único cero $x = 0$.
- Son crecientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, es decir en todo su dominio.
- En estos casos, en que $k = 1$, todas contienen los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.
- Cuando se considera $f(x) = kx^n$ con $0 < k < 1$, la gráfica de la función se expande, alejándose del eje y. Si $k > 1$, la gráfica de la función se contrae, acercándose al eje y, como puedes comprobar dibujandolas con un graficador como Desmos o GeoGebra.

Puedes apreciar visualmente un resumen de lo tratado anteriormente consultando el video a través del código QR 10.1, donde observarás cómo se grafica la función potencia para $k = 1$.

QR 10.1. Video sobre $f(x) = x^n$, n entero positivo.
Fuente: Parzibyte 2025.

Actividad formativa 10.1

1. Analiza el efecto de considerar $k < 0$ en la función $f(x) = kx^n$, con n entero positivo impar, y para ello utiliza GeoGebra o Desmos para representar las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^3, \quad f(x) = -x^5, \quad f(x) = -x^7 \text{ y } f(x) = -x^9$$

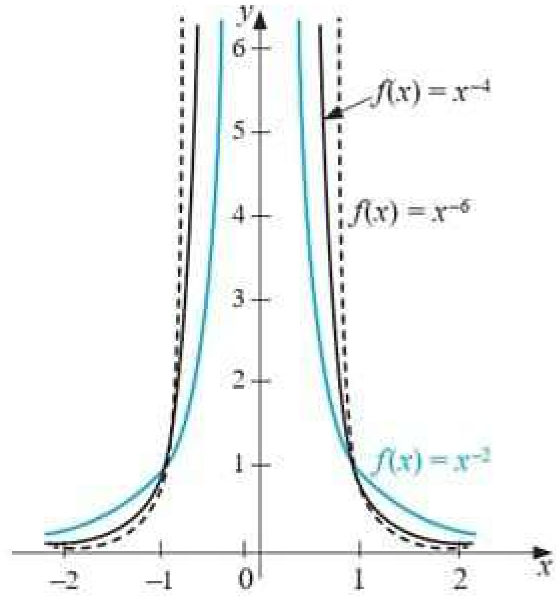
¿Qué aprecias respecto a las gráficas de $f(x)$ en relación con sus propiedades?

Función potencia de exponente entero negativo par

Este es el caso de las funciones

$$f(x) = x^{-2},\ f(x) = x^{-4},\ f(x) = x^{-6},\ldots$$

cuyas gráficas, de las tres primeras, aparecen en la figura de la derecha.



De la figura, independientemente del valor del exponente, se pueden apreciar las siguientes propiedades:

- El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales excepto el 0, es decir $\mathcal{R} \setminus \{0\}$.
- El rango de estas funciones es el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo $(0, +\infty)$.
- Son funciones pares, es decir $f(x) = f(-x)$; por tanto, son simétricas respecto al eje y.
- No tienen ceros.
- Son crecientes en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrecientes en el intervalo $(0, +\infty)$.
- En estos casos, en que $k = 1$, todas contienen los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.
- Cuando se considera $f(x) = kx^n$ con $0 < k < 1$, la gráfica de la función se contrae, acercándose al eje y. Si $k > 1$, la gráfica de la función se expande, alejándose del eje y, como puedes comprobar representándolas con un graficador como Desmos o GeoGebra.

Actividad formativa 10.2

1. Utiliza GeoGebra o Desmos para representar las gráficas de las funciones

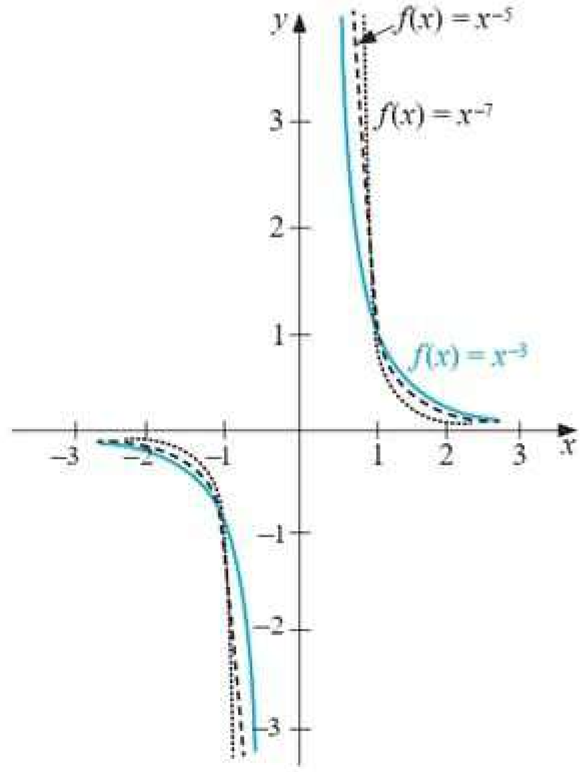
$$f(x) = -x^{-2}, \quad f(x) = -x^{-4}, \quad f(x) = -x^{-6} \text{ y } f(x) = -x^{-8}$$

¿Qué diferencias aprecias respecto a sus propiedades con relación a cuando se considera $k > 0$?

QR 10.2. Video sobre $f(x) = x^n$, n par negativo.
Fuente: Parzibyte 2025.

Puedes apreciar visualmente un resumen de lo tratado anteriormente escanea el código QR 10.2.

Función potencia de exponente entero negativo impar



Este es el caso de las funciones

$$f(x) = x^{-3}, \quad f(x) = x^{-5}, \quad f(x) = x^{-7}, \ldots$$

cuyas gráficas aparecen en la figura de la derecha.

De la figura, independientemente del valor del exponente, se pueden apreciar las siguientes propiedades:

- El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales excepto el 0, es decir $\mathcal{R} \setminus \{0\}$.
- El rango de estas funciones es el conjunto de los números reales excepto el 0, es decir $\mathcal{R} \setminus \{0\}$.
- Son funciones impares, es decir $f(-x) = -f(x)$; por tanto, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- No tienen ceros.
- Son decrecientes en todo su dominio.
- En estos casos, en que $k = 1$, todas contienen los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.
- Cuando se considera $f(x) = kx^n$ con $k > 1$, la gráfica de la función se expande, alejándose del eje y. Si $0 < k < 1$, la gráfica de la función se contrae, acercándose al eje y, como puedes comprobar representándolas, con un graficador como Desmos o GeoGebra.

Actividad formativa 10.3

1. Utiliza GeoGebra o Desmos para representar las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^{-3}, \quad f(x) = -x^{-5}, \quad f(x) = -x^{-7} \text{ y } f(x) = -x^{-9}$$

¿Qué diferencias aprecias respecto a sus propiedades con relación a cuando se considera $k > 0$?

Puedes apreciar visualmente un resumen de lo tratado anteriormente escanea el código QR 10.3.

QR 10.3. Video sobre $f(x)=x^n$, n impar negativo.
Fuente: Parzibyte 2025.

Actividad formativa 10.4

1. De acuerdo con los casos estudiados anteriormente completa la siguiente tabla con las propiedades fundamentales de la función potencia.

   En los casos necesarios subdivide las casillas, como aparece en los ejemplos.

Propiedades de $f(x) = kx^n$	Exponente n positivo par		Exponente n positivo impar		Exponente n negativo par		Exponente n negativo impar	
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
Un ejemplo							$f(x) = 0.2x^{-3}$	
Dominio			$\mathcal{R}$		$\mathcal{R} \setminus \{0\}$			
Rango					$\mathcal{R}^+$			
Paridad	Par							
Simetría							Respecto al origen	
Creciente					En $x < 0$			
Decreciente						En $x < 0$		
Asíntotas			No tiene					
Ceros	$x = 0$						No tiene	

2. ¿Es posible determinar propiedades que sean comunes en todos los casos? ¿Cuáles?

Las funciones potencia tienen aplicación en diversas esferas de la vida, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo formativo 10.2

1. Un objeto dejado caer desde una determinada altura se mueve en caída libre y recorre una distancia que se expresa mediante la expresión $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 9.8$ m/s² es la aceleración que ejerce la gravedad sobre todos los cuerpos. Si se deja caer un objeto desde una altura de 150 metros, ¿a qué altura estará a los 4 segundos de estar cayendo?

   Resolución

   La expresión $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ representa una función potencia, en la que $k = \frac{1}{2}g$ es constante, t es la variable y 2 el exponente. Así, para $t = 4$, se tiene $d(4) = \frac{1}{2}g \cdot 4^2 = 9.8 \cdot (8) = 78.4$.

   A los cuatro segundos ha recorrido 78.4 m, por tanto, se encuentra a una altura de 150 m – 78.4 m = 71.6 m.

Ejemplo formativo 10.3

1. La resistencia R en kg de una viga es proporcional al cuadrado de su grosor.
   a) Encuentra una expresión que represente la función descrita anteriormente.
   b) Si para un determinado material la constante de proporcionalidad es 0.7 kg/cm², determina la resistencia de una viga de ese material de 5 cm de grosor.

Resolución

a) Si s representa el grosor de la viga y R la resistencia, entonces la proporcionalidad se describe por la función potencia dada por $R(s) = ks^2$.

b) Si $k = 0.7$ kg/cm², entonces para una viga de 5 cm de espesor

$$R(5) = 0.7 \cdot 5^2 = 17.5.$$

La resistencia de la viga es de 17.5 kg.

Ejemplo formativo 10.4

1. El volumen de una esfera navideña es de 36π cm³. Determina las dimensiones que debe tener una caja para empaquetar 9 de estas bolas.

   Resolución

   El volumen de una esfera está determinado por la expresión $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por tanto, el radio correspondiente a la esfera es $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

   En este caso $r = \sqrt[3]{\frac{3.36\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

   Cada bola navideña tendrá un diámetro de 6 cm, puesto que el diámetro es el doble del radio, por lo que 3 bolas, una a continuación de la otra, abarcan longitudinalmente 18 cm de largo, otros 18 de altura y 6 de profundidad.

   La caja para la envoltura debe medir interiormente $18 \times 18 \times 6$ cm³.

Actividad formativa 10.5

1. Se conoce que la distancia d en metros que recorre un cuerpo en caída libre en t segundos está determinada por la expresión $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 9.8$ m/s² es la aceleración que ejerce la gravedad sobre todos los cuerpos. ¿Qué altura tiene un edificio si una piedra lanzada desde lo alto tarda tres segundos en regresar a la tierra?

2. Se está estudiando el crecimiento de una bacteria en un medio de cultivo y se ha determinado que la cantidad de bacterias N en función del tiempo t (en horas) está dada por una función potencia del tipo $N(t) = kt^2$. Se pudo medir que a los 5 minutos la población se estimaba en 75 bacterias. ¿Cuál será la población de bacterias del cultivo a los 20 minutos?

3. El costo total C en pesos de producir una cierta cantidad q de una pieza de refacción para una licuadora está modelado por la función potencia $C(q) = kq^4$, donde q es la cantidad producida y k es una constante que depende de los costos de producción y de los gastos fijos de la empresa. Si $k = 3.5$, determina cuánto cuesta producir 30 piezas.

EVALUACIÓN FORMATIVA 10.1

1. De las siguientes funciones, ¿cuáles son funciones potencia?

   a) $f(x) = -x^2$

   b) $f(x) = 3x$

   c) $f(x) = \frac{9x^2}{5}$

   d) $f(x) = 3$

   e) $f(x) = \frac{2x}{3x^2 + 5}$

   f) $f(x) = -1.2x^{-7}$

2. Sin construir la gráfica determina el dominio y la imagen de:

   a) $f(x) = 3x^{15}$

   b) $h(x) = -2x^{-3}$

   c) $g(x) = \sqrt{3}x^9$

3. Los ingresos I en miles de pesos de una pequeña empresa de confecciones de ropa están modelados por la función potencia $I(t) = kt^4$, donde t es el periodo de tiempo en meses y k es una constante que depende de las condiciones del mercado y cuyo valor varía de 0.25 en el periodo de octubre a abril y 0.4 en el periodo de mayo a septiembre. Determina cuándo son mayores los ingresos al cabo de un año, si en los meses de invierno o de verano.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ____________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 10. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Estudié propiedades de las funciones potencia a partir de su representación gráfica obtenida con graficadores. (M3-C1)			
Planteé soluciones a diferentes problemas aplicando las funciones potencia. (M4-C3)			
Compartí con mis compañeros la forma que utilicé para obtener las propiedades de las funciones potencia. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

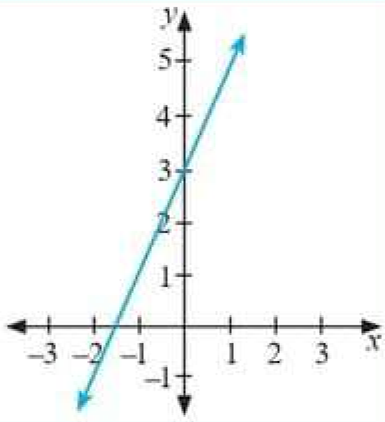
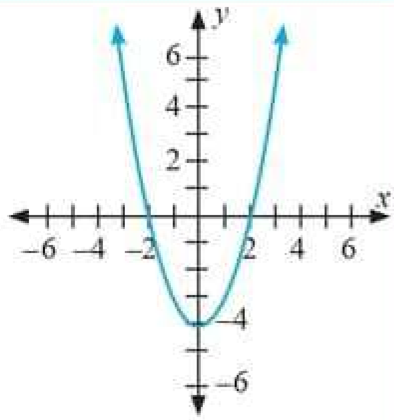
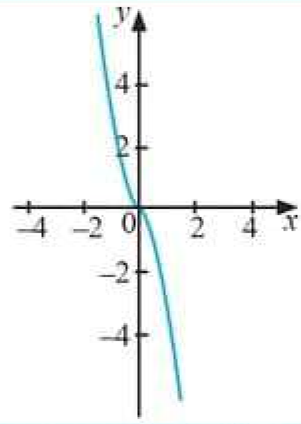
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 10 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Estudió propiedades de las funciones potencia a partir de su representación gráfica obtenida con graficadores. (M3-C1)			
Planteó soluciones a diferentes problemas aplicando las funciones potencia. (M4-C3)			
Compartió con sus compañeros la forma que utilizó para obtener las propiedades de las funciones potencia. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones polinomiales

	Función lineal $f(x) = 2x + 3$	Función cuadrática $g(x) = x^2 - 4$	Función cúbica $h(x) = -x^3 - 2x$
Dominio	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
Rango	Es una línea recta con pendiente diferente de 0, su rango es $\mathcal{R}$.	Es una parábola con vértice en (0, –4) y se abre hacia arriba. Su rango es $[-4, +\infty)$.	Los términos cúbicos pueden tomar cualquier valor real, el rango es $\mathcal{R}$.
Gráfica			

Progresión de aprendizaje 11

Compara las características clave de funciones polinomiales de distintos grados, identifica patrones en su comportamiento y elabora problemas que muestren la aplicación de las funciones polinomiales en fenómenos naturales y sociales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 11.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. Una función lineal tiene la forma general:

   a) $y = mx + b$

   b) $y = ax^2 + bx + c$

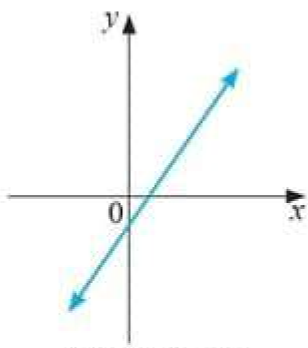
   c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   d) Ninguna de las anteriores

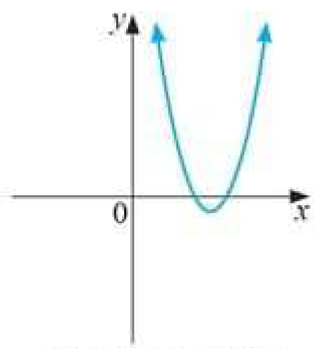
2. La gráfica de una función cuadrática es:
   a) Una recta
   b) Una parábola
   c) Una elipse
   d) Un círculo
3. ¿Cómo se llama el punto donde cambia el signo de la pendiente en una función cuadrática?
   a) Punto de inflexión
   b) Rango
   c) Vértice
   d) Intersección con el eje x
4. Si una función cuadrática tiene coeficiente principal negativo, ¿cómo será su gráfica?
   a) Abierta hacia arriba
   b) Abierta hacia abajo
   c) Abierta hacia la derecha
   d) Abierta hacia la izquierda
5. ¿Cuál de las siguientes funciones es un polinomio de grado 3?
   a) $f(x) = 2x^{-3} - x^2 + 3$
   b) $g(x) = -x^3 + 4x - 5$
   c) $h(x) = 3x + 2$
   d) $k(x) = x^2 - 6x + 1$

En progresiones anteriores exploraste acerca de las funciones lineales y cuadráticas. A continuación, estudiarás las **funciones polinomiales** con lo que ampliarás tus conocimientos previos sobre funciones y podrás modelar fenómenos más complejos posteriormente.

Recuerda que las **funciones lineales** tienen la forma $f(x) = mx + b$, sus gráficas son rectas y además su grado es 1, mientras que las **funciones cuadráticas** son de grado 2, su forma es $f(x) = ax^2 + bx + c$ y sus gráficas son parábolas, como puedes observar en las figuras de la derecha.



Función lineal



Función cuadrática

Funciones polinomiales

Cuando hablamos de funciones polinomiales, el grado puede ser también mayor a dos, y así como las funciones cuadráticas, sus gráficas tienen características como **dominio, rango, puntos de inflexión, máximos y mínimos, y cambios en la concavidad.**

Sabías que...

Una **función constante**, es decir, de grado 0, se considera también una función polinomial.

Definición de función polinomial

Una función polinomial es una expresión matemática de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 son números reales y el mayor de los exponentes, n, indica el grado del polinomio que es un número entero no negativo.

Por ejemplo, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ es una función polinomial de grado 3 y $R(x) = -x^4 - 2x + 1$, es una función polinomial de grado 4.

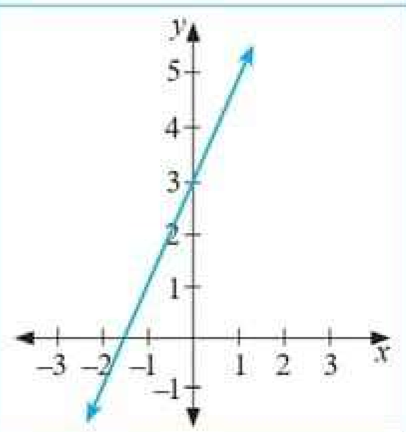
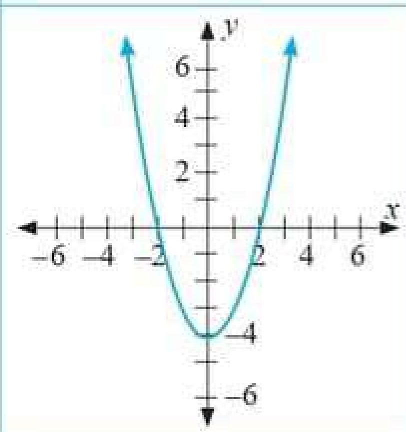
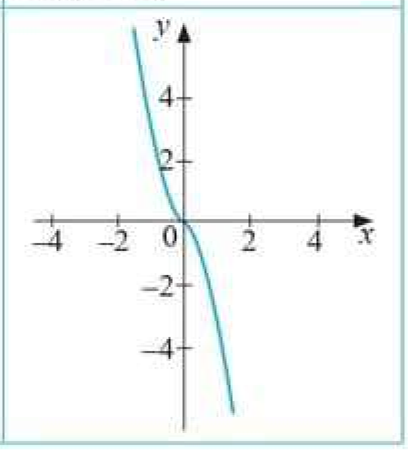
En el caso de $h(x) = x^{-2} + 1$ no es una función polinomial, dado que el exponente de la variable x es negativo.

Las funciones polinomiales más sencillas son las definidas por monomios, es decir las funciones potencia, que ya estudiaste en la progresión anterior, por ejemplo $f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^4$, $f(x) = ax^6$, cuyo dominio es todo $\mathcal{R}$ y su **rango** depende de si a es positiva o negativa; cuando el exponente n es impar, por ejemplo $f(x) = ax^3$, $f(x) = ax^5$, $f(x) = ax^7$, su dominio y rango siempre serán los números reales.

Ejemplo formativo 11.1

1. Utiliza un graficador para obtener la gráfica de las siguientes funciones polinomiales y determina su dominio y rango.

Resolución

	Función lineal $f(x) = 2x + 3$	Función cuadrática $g(x) = x^2 - 4$	Función cúbica $h(x) = -x^3 - 2x$
Dominio	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
Rango	Es una línea recta con pendiente diferente de 0, su rango es $\mathcal{R}$.	Es una parábola con vértice en $(0, -4)$ y se abre hacia arriba. Su rango es $[-4, +\infty)$.	Los términos cúbicos pueden tomar cualquier valor real, el rango es $\mathcal{R}$.
Gráfica			

Todas las funciones polinomiales tienen como propiedad común que su dominio es el conjunto de los números reales $\mathcal{R}$; otras propiedades dependen del grado del polinomio y del coeficiente de mayor grado y por tanto su gráfico puede tener diferentes formas y características, las que se hacen más diversas en la medida que se consideran funciones de mayor grado y la cantidad de términos.

Propiedades principales de las funciones polinomiales

- El **dominio** de cualquier función polinomial es **todo el conjunto de los números reales** $\mathcal{R}$, ya que podemos evaluar la función en cualquier valor de x.
- El **rango** depende del grado del polinomio y del signo de su coeficiente principal:
  - Si el grado es impar, el rango es el conjunto de los números reales.
  - Si el grado es par, el rango está limitado y depende del coeficiente del término de mayor grado o coeficiente principal.
    - Cuando es positivo, la función polinomial tiene un mínimo absoluto y el rango será desde este valor mínimo hacia $+\infty$.
    - Cuando es negativo, la función polinomial tiene un máximo absoluto y el rango será desde $-\infty$ hasta ese valor máximo.
- El número máximo de **raíces** de las funciones polinomiales está dado por el grado del polinomio y sus coeficientes; determinar las raíces puede involucrar varios métodos, por ejemplo, factorización, división, fórmula general para las funciones cuadráticas o métodos numéricos.
- La **intersección con el eje de las ordenadas** es el coeficiente a_0 o término independiente.
- Las funciones polinomiales **son continuas** en todo su dominio.
- Respecto a la **paridad**, una función polinómica es par, $f(-x) = f(x)$, si solo tiene términos con exponentes pares y es impar, $f(-x) = -f(x)$, si solo tiene términos con exponentes impares.

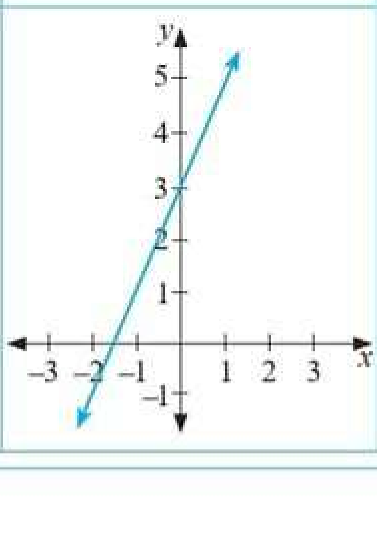
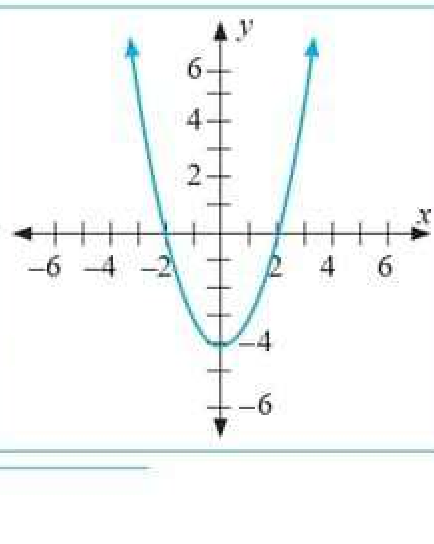
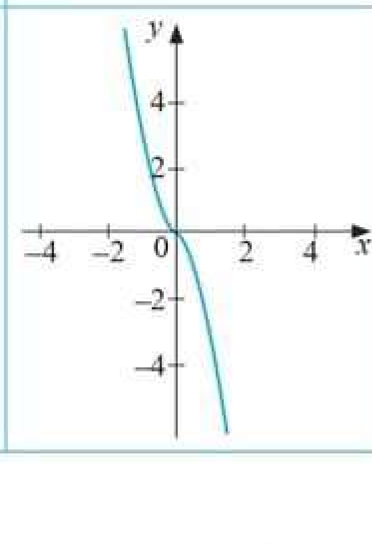
Con relación a la monotonía, puntos de inflexión y concavidad el comportamiento de las funciones polinomiales es diverso y depende tanto del grado y coeficiente principal, como de la cantidad de términos. Un proceso analítico para determinar esas propiedades requiere utilizar la derivación como aprendiste en Pensamiento Matemático III, pero también el análisis de sus gráficas y algunos elementos generales permiten obtener determinadas conclusiones sobre estas propiedades:

- Una función polinomial puede ser **monótona** creciente o decreciente en diferentes intervalos. El coeficiente del término de mayor grado determina, en general, el comportamiento global de la función en los extremos:
  - Si es positivo y el grado del polinomio es impar, la función tiende a $-\infty$ cuando $x \to -\infty$ y a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, mostrando un crecimiento general hacia el infinito en términos globales.
  - Si es negativo y de grado impar, el comportamiento se invierte: la función decrece globalmente.
- Como ya sabes, los puntos donde la función cambia de creciente a decreciente son **máximos** y los puntos donde cambia de decreciente a creciente son **mínimos**.
- Con la gráfica de la función obtenida a través de un graficador puedes apreciar los puntos donde alcanza un extremo local o absoluto.
- **Puntos de inflexión** son los valores de x donde la concavidad cambia.
    - Las funciones lineales y cuadráticas no tienen puntos de inflexión.
    - En una función polinomial de tercer grado, el punto de inflexión, si existe, tiene como abscisa el valor $x = -\frac{b}{3a}$.
    - En funciones polinomiales de mayor grado, para encontrar los puntos de inflexión depende del grado del polinomio y sus derivadas.

Ejemplo formativo 11.2

1. Basándote en las propiedades referidas de las funciones polinomiales analiza y compara las funciones polinomiales de diferentes grados consideradas en el Ejemplo formativo 11.1.

Resolución

	Función lineal $f(x) = 2x + 3$	Función cuadrática $g(x) = x^2 - 4$	Función cúbica $h(x) = -x^3 - 2x$
Dominio	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
Rango	Es una línea recta con pendiente diferente de 0, su rango es $\mathcal{R}$.	Es una parábola con vértice en (0, –4) y se abre hacia arriba. Su rango es $[-4, +\infty)$.	Al ser de grado impar su rango es $\mathcal{R}$.
Raíces reales	$f(x) = 2x + 3$ $0 = 2x + 3$ $x = \frac{-3}{2} = -1.5$	$g(x) = x^2 - 4$ $0 = (x + 2)(x - 2)$ $x + 2 = 0, \quad x - 2 = 0$ $x_1 = -2, \quad x_2 = 2$	$h(x) = -x^3 - 2x$ $x(-x^2 - 2) = 0$ $x = 0, \quad -x^2 - 2 = 0$ $x = 0, \quad -x^2 = 2$ Sólo una raíz real $x = 0$
Intersección con eje y	(0, 3)	(0, –4)	(0, 0)
Continuidad	Continua en $\mathcal{R}$	Continua en $\mathcal{R}$	Continua en $\mathcal{R}$
Paridad	No tiene $f(-x) = 2(-x) + 3$ $f(-x) = -2x + 3$	Par $g(-x) = (-x)^2 - 4$ $g(-x) = x^2 - 4$	Impar $h(-x) = -(-x)^3 - 2(-x)$ $h(-x) = x^3 + 2x$
Simetría	No presenta	Simétrica respecto al eje y	Simétrica respecto al origen
Máximo o mínimo	No presenta	$g(0) = 0^2 - 4$ $g(0) = -4$ Mínimo absoluto (0, –4)	No presenta
Monotonía	Creciente en todo $\mathcal{R}$	Decreciente $(-\infty, 0)$ Creciente $(0, +\infty)$	Decreciente en todo $\mathcal{R}$
Punto de inflexión	No presenta	No presenta	Posible punto en $x = -\frac{b}{3a} = -\frac{0}{3(1)} = 0$
Concavidad	No presenta	Cóncava hacia arriba desde $(-\infty, +\infty)$	Cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$ Cóncava hacia abajo $(0, +\infty)$
Gráfica			

Actividad formativa 11.1

1. Utiliza la herramienta Desmos o Geogebra y representa las siguientes funciones polinomiales. Analiza y compara su comportamiento y determina sus principales características.

   a) $f(x) = x^4 - 16$

   b) $f(x) = x^3 - 1$

   c) $f(x) = -x^3 + 8$

En las funciones polinomiales de grado impar, si se parte de la forma básica y se añaden términos, la gráfica correspondiente va incorporando características de los términos de menor grado, sin perder el carácter global definido por el término de mayor grado, es decir, el patrón se mantiene. Cada término adicional introduce mayor complejidad, pero se conservan los extremos en direcciones opuestas.

Las gráficas de funciones de grado par tienden a abrirse hacia arriba o hacia abajo, haciéndose más complejas en correspondencia con la cantidad de términos, pero los extremos de la gráfica siempre apuntan en la misma dirección. También aparecen más detalles locales (máximos, mínimos y puntos de inflexión), mientras el comportamiento en los extremos sigue dominado por el término de mayor grado y los de menor grado afectan las características cercanas al origen y la curvatura.

Veamos dos ejemplos que ilustran lo anterior.

Ejemplo formativo 11.3

1. Compara las gráficas correspondientes de las siguientes funciones.

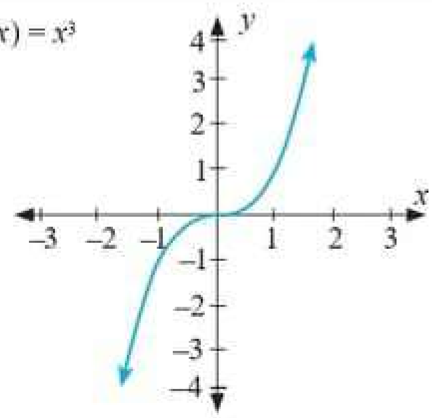
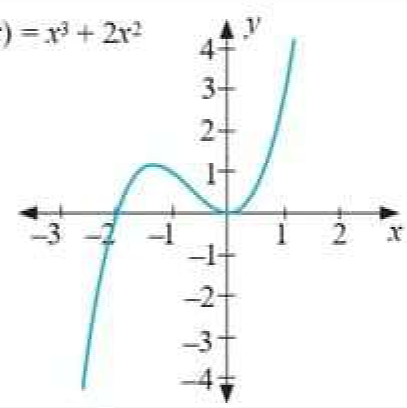
   a) $f(x) = x^3$

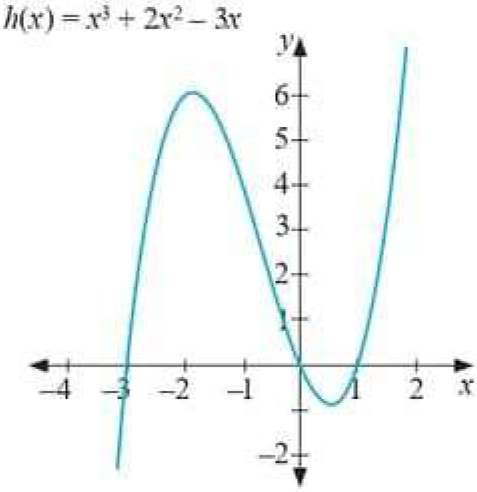
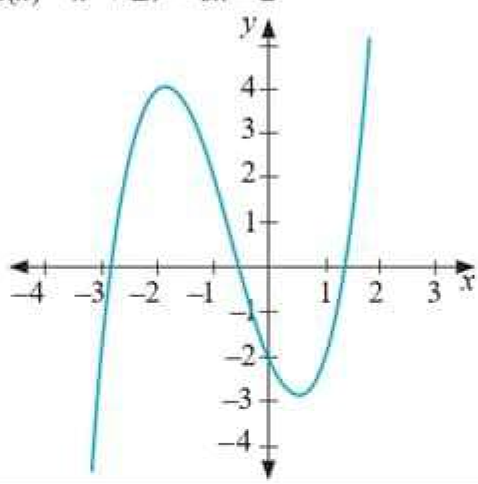
   b) $g(x) = x^3 + 2x^2$

   c) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

   d) $s(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

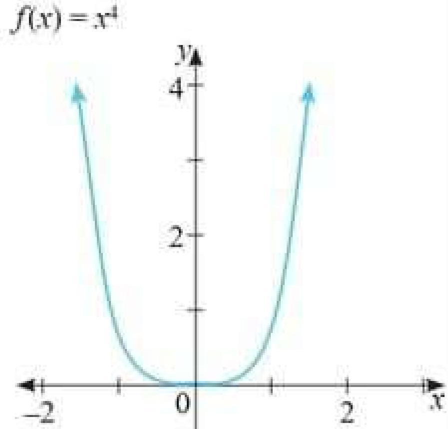
Resolución

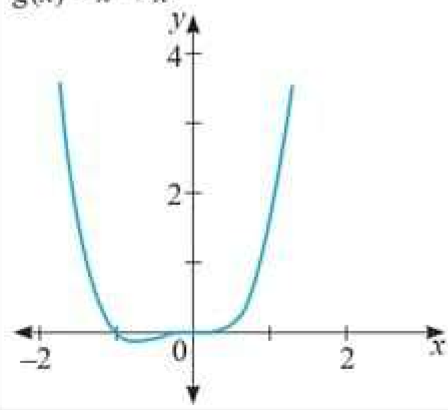
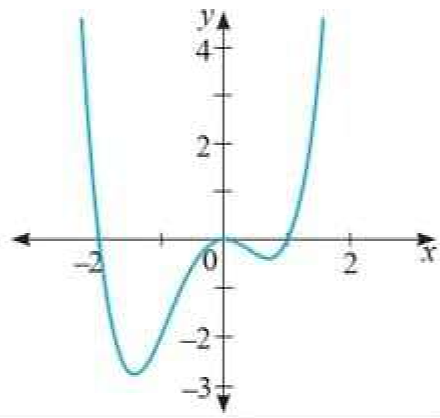
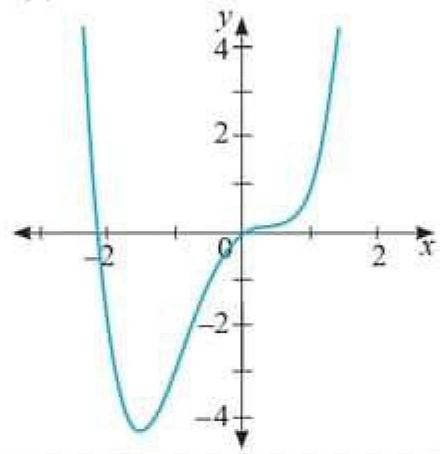
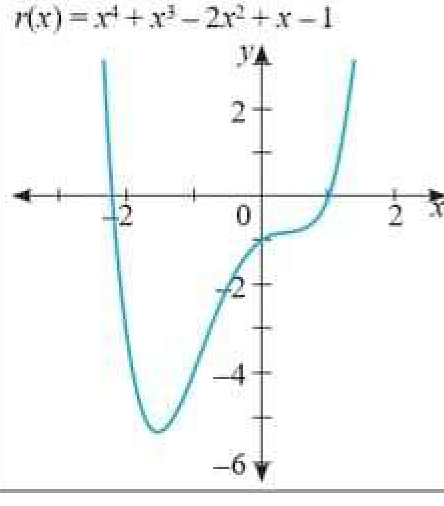
	Función cúbica	Característica de la gráfica	Ejemplo y gráfica
a)	$f(x) = ax^3$	Curva cúbica básica, $a = 1$	$f(x) = x^3$ 
b)	$g(x) = ax^3 + bx^2$	Cambia su forma, apreciándose valles y cimas	$g(x) = x^3 + 2x^2$ 

c)	$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx$	Cambia la posición de los extremos relativos y del punto de inflexión, a través de un efecto de “inclinación de la curva”	$h(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ 
d)	$s(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Debido al término constante, la gráfica se traslada verticalmente sin alterar su forma	$s(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ 

2. Compara las gráficas correspondientes de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = x^4$
   b) $g(x) = x^4 + x^3$
   c) $h(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$
   d) $s(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x$
   e) $r(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$

Resolución

	Función de grado 4	Característica de la gráfica	Ejemplo y gráfica
a)	$f(x) = ax^4$	Curva básica, $a = 1$	$f(x) = x^4$ 

b)	$g(x) = ax^4 + bx^3$	Cambia su forma, apreciándose valles y cimas	$g(x) = x^4 + x^3$ 
c)	$h(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$	Aumenta curvatura y cambia los extremos locales	$h(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$ 
d)	$s(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$	Desplaza los puntos donde la función crece o decrece	$s(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x$ 
e)	$r(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	Debido al término constante, la gráfica se traslada verticalmente sin alterar su forma	$r(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$ 

3. Utiliza el graficador Desmos para apreciar en un solo plano cartesiano el comportamiento de estas funciones.

Actividad formativa 11.2

1. Utiliza Desmos o Geogebra para graficar las siguientes funciones y construye una tabla para reflejar sus principales características.

   a) $f(x) = -3x + 6$

   b) $f(x) = x^2 - 9$

   c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

   d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

Aplicaciones de las funciones polinomiales

Las funciones polinomiales tienen múltiples aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, ya que permiten modelar y comprender fenómenos complejos. En matemáticas, son fundamentales en álgebra y cálculo para resolver ecuaciones, calcular derivadas e integrales. En física, se utilizan para describir el movimiento de los objetos, analizar fuerzas y aplicar principios como la ley de Hooke.

En economía y finanzas, estas funciones ayudan a modelar el crecimiento económico, la oferta y la demanda, así como a calcular el valor presente y futuro de inversiones. En biología, son clave para estudiar el crecimiento de poblaciones y la propagación de enfermedades. En ingeniería, se aplican en el diseño y control de sistemas dinámicos, así como en el análisis de estructuras y materiales.

En informática, los polinomios juegan un papel importante en el desarrollo de algoritmos, visualización de datos y análisis de la complejidad computacional. En geometría, permiten describir curvas, superficies y figuras como las cónicas. Además, en estadística y análisis de datos, son esenciales para ajustar curvas y construir modelos predictivos.

Gracias a su versatilidad, las funciones polinomiales permiten analizar, interpretar y predecir una gran variedad de situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, permiten modelar el crecimiento de una población, el número de personas en una ciudad o el crecimiento de una especie de animales, bajo ciertas condiciones.

Ejemplo formativo 11.4

1. Un grupo de agricultores en Sinaloa está estudiando cómo la cantidad de fertilizante afecta el rendimiento de un cultivo de maíz. A partir de datos experimentales, han determinado que la producción de maíz en toneladas por hectárea está modelada por la función $R(x) = -0.02x^3 + 0.3x^2 + 2x + 5$, donde x es la cantidad de fertilizante aplicada en kilogramos por hectárea y $R(x)$ representa el rendimiento del cultivo en toneladas por hectárea.

   a) ¿Cuál es el rendimiento del cultivo si no se usa fertilizante?

   b) ¿Cuánta cantidad de fertilizante maximiza el rendimiento del cultivo?

   c) Determina el punto de inflexión a partir de la gráfica e interprétalo en términos de concavidad.

   d) ¿A partir de qué cantidad de fertilizante el rendimiento empieza a disminuir?

   e) ¿Consideras importante analizar el comportamiento de esta función polinomial con aplicación en el ámbito agrícola? Fundamenta tu respuesta.

   Resolución

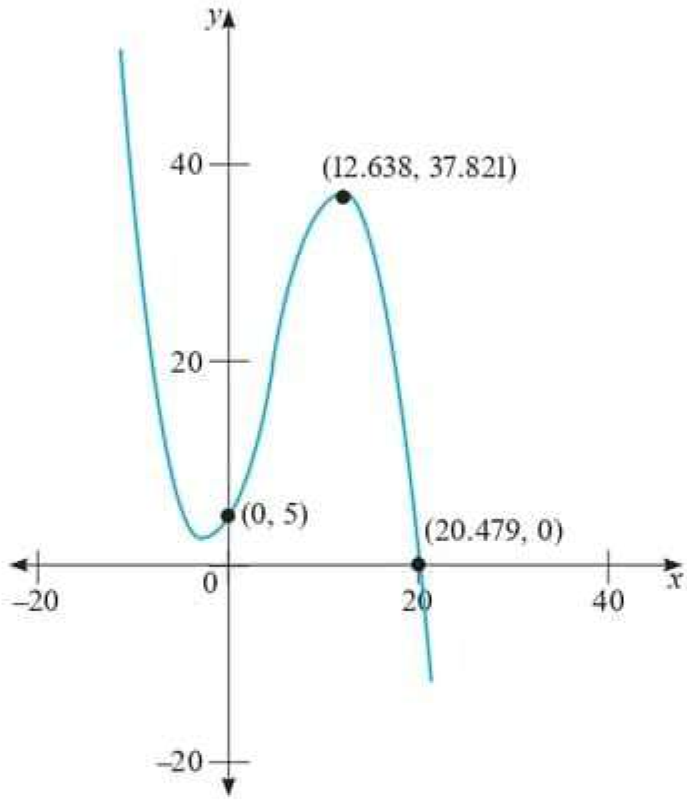
   a) ¿Cuál es el rendimiento del cultivo si no se usa fertilizante?

      Para encontrar la producción cuando no se aplica fertilizante evalúa la función en $x = 0$: $R(0) = -0.02(0)^3 + 0.3(0)^2 + 2(0) + 5 = 5$.

      Si no se usa fertilizante, el rendimiento del cultivo es de 5 toneladas por hectárea.

   b) ¿Cuánta cantidad de fertilizante maximiza el rendimiento del cultivo?

Para encontrar el fertilizante que maximiza el rendimiento, utiliza un graficador para representar la función como puedes apreciar en la siguiente figura.



Halla el punto crítico (máximo) desplazándote sobre la gráfica de esta.

El rendimiento es máximo cuando se aplican aproximadamente 12.64 kg de fertilizante por hectárea.

c) ¿Cuál es el rendimiento máximo que se puede obtener?

A partir de la gráfica puedes ubicar el máximo de la función, por lo que el rendimiento máximo es aproximadamente 37.82 toneladas por hectárea.

d) Determina el punto de inflexión a partir de la gráfica e interprétalo en términos de concavidad.

De acuerdo con la gráfica de $R(x) = -0.02x^3 + 0.3x^2 + 2x + 5$ el punto de inflexión está en el valor de $x = 5$.

Encuentra el valor de y sustituyendo el valor de x en la función

$$\begin{aligned} y = R(5) &= -0.02(5)^3 + 0.3(5)^2 + 2(5) + 5 \\ &= -0.02(125) + 0.3(25) + 10 + 5 \\ &= -2.5 + 7.5 + 10 + 5;\ \text{luego } y = 20. \end{aligned}$$

El punto de inflexión se encuentra en (5, 20) y significa que, hasta $x = 5$, el rendimiento del cultivo está creciendo cada vez más rápido (concavidad hacia arriba). Después de $x = 5$, el rendimiento sigue aumentando, pero cada vez más lento (concavidad hacia abajo).

e) ¿A partir de qué cantidad de fertilizante el rendimiento empieza a disminuir?

Gráficamente se aprecia que para $x > 12.64$ la función decrece; es decir, si se aplica más de 12.64 kg de fertilizante por hectárea, el rendimiento empieza a disminuir.

f) ¿Consideras importante analizar el comportamiento de esta función polinomial con aplicación en el ámbito agrícola? Fundamenta tu respuesta.

Sí, analizar funciones polinomiales como la presentada puede ayudar a los agricultores a optimizar el uso del fertilizante y evitar desperdicio, maximizando la producción en los cultivos de Sinaloa.

Actividad formativa 11.3

1. La población de un pueblo está modelada por la función:

$$P(t) = -t^3 + 6t^2 + 10t + 500$$

donde $P(t)$ es la población después de t años.

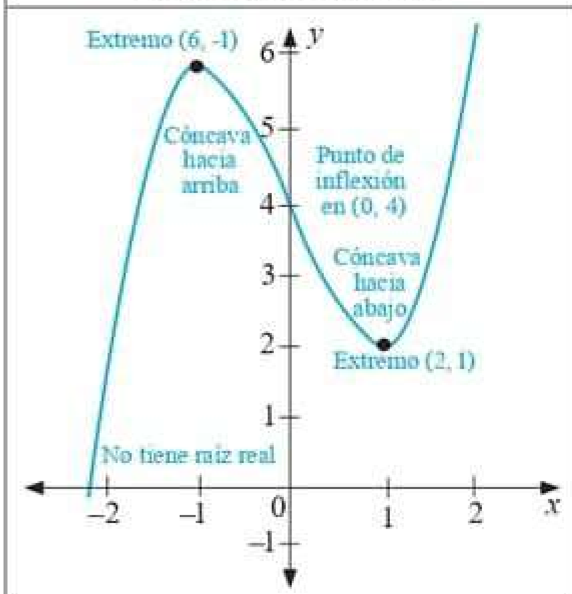
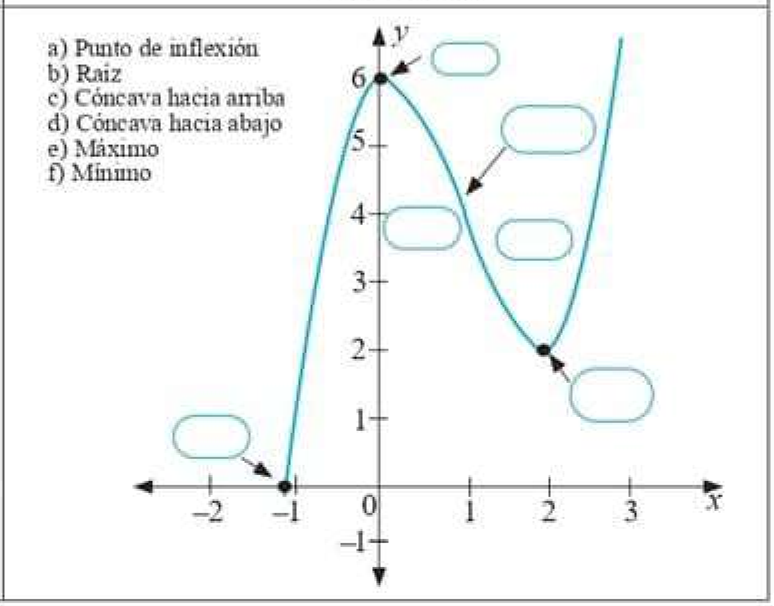
a) Determina la población después de 7 y 9 años.

b) Con ayuda de un graficador representa la gráfica de la función. ¿Qué características tiene la población a los 8 años?

2. Una fábrica produce y vende artículos electrodomésticos y el costo total de producción de un artículo $C(x)$ en función de la cantidad producida x está dado por la función $C(x) = 2x^3 - 150x$. El ingreso por la venta de los artículos $I(x)$ está dado por $I(x) = 50x$. ¿Cuántas unidades debe producir para obtener ganancias?

EVALUACIÓN FORMATIVA 11.1

1. Observa los siguientes gráficos de funciones polinomiales, en el primero identifica con color rojo los errores y en el segundo ubica las características.

Identificación de errores	Características
	

2. El gobierno de Sinaloa está analizando el crecimiento poblacional para planificar su infraestructura. Históricamente, la población ha seguido un patrón que puede modelarse con una función polinomial. Con base en datos históricos, se ha obtenido el modelo $P(x) = 0.01x^3 - 0.5x^2 + 4x + 100$.

$P(x)$ representa la población en miles de habitantes y x representa los años transcurridos desde el año 2000.

a) ¿Cuál era la población en el año 2000?

b) Calcula la población estimada en el año 2025 ($x = 25$).

c) Calcula la población estimada en el año 2040 ($x = 40$).

d) Utiliza GeoGebra o Desmos para obtener la gráfica, describe la gráfica obtenida.

e) A partir del gráfico obtenido en la pregunta anterior determina el valor máximo y mínimo.

f) ¿Qué tendencia esperas observar en la población después de 30 años? ¿A qué factores crees que se deba la tendencia después de 30 años?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ____________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 11. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Comprobé los procedimientos usados en el análisis de las gráficas de funciones polinomiales empleando recursos tecnológicos. (M3-C1)			
Organicé tablas de forma lógica para analizar las propiedades de funciones polinómicas. (M3-C2)			
Apliqué procedimientos, técnicas gráficas y lenguaje matemático para la solución de problemas utilizando las funciones polinómicas. (M3-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

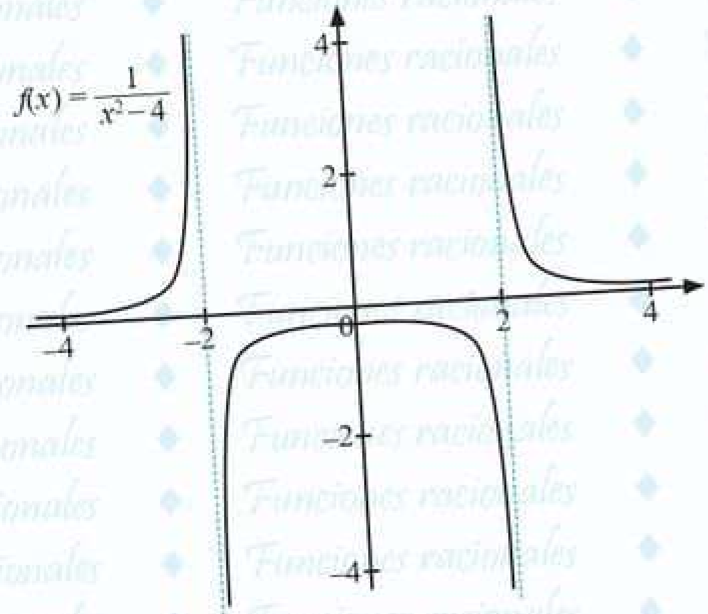
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 11 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Comprobó los procedimientos usados en el análisis de las gráficas de funciones polinomiales empleando recursos tecnológicos. (M3-C1)			
Organizó tablas de forma lógica para analizar las propiedades de funciones polinómicas. (M3-C2)			
Aplicó procedimientos, técnicas gráficas y lenguaje matemático para la solución de problemas utilizando las funciones polinómicas. (M3-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones racionales



Progresión de aprendizaje 12

Analiza el comportamiento de las funciones racionales, incluyendo sus asíntotas y discontinuidades, y diseña un modelo matemático utilizando funciones racionales para describir un fenómeno del mundo real.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 12.1

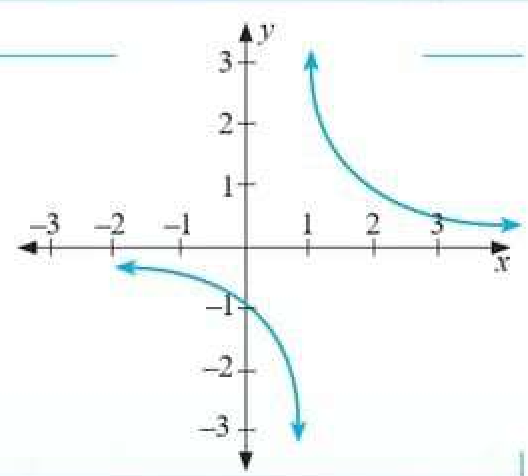
1. Realiza la siguiente operación $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} =$

2 Observa la gráfica de la derecha y responde lo siguiente:

a) El dominio de la función es:

b) El rango de la función es:

c) Describe dos características de la función.



Al igual que los polinomios, cada fracción algebraica racional permite definir una función real de variable real, conocida como función racional. Sin embargo, su dominio no abarca todo el conjunto de los números reales, sino únicamente aquellos valores en los que el denominador no se anula. Dado que un polinomio puede considerarse una fracción racional con denominador igual a 1, se puede afirmar que las funciones polinomiales son un caso particular de las funciones racionales.

Definición de función racional

Una función racional es una función definida por una correspondencia del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en la que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de una misma variable. El dominio de la función es el subconjunto de los números reales en el que $Q(x) \neq 0$.

Así como las razones entre números enteros forman los números racionales, las razones entre funciones polinomiales dan origen a las funciones racionales. En otras palabras, una función racional es aquella que se obtiene al dividir un polinomio entre otro. Algunos ejemplos de funciones racionales son:

$$r(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x + 1} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \qquad g(x) = \frac{3x^2}{x^4 - 1}$$

Dominio de una función racional

El dominio de una función racional es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la función está definida, lo que significa todos aquellos valores donde el denominador no es cero; es decir, $D_f = \mathcal{R} \setminus \{x | x$ anula el denominador$\}$ y el rango de f es un subconjunto de $\mathcal{R}$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo formativo 12.1

1. Determina el dominio de las siguientes funciones racionales.

   a) $r(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

   b) $j(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

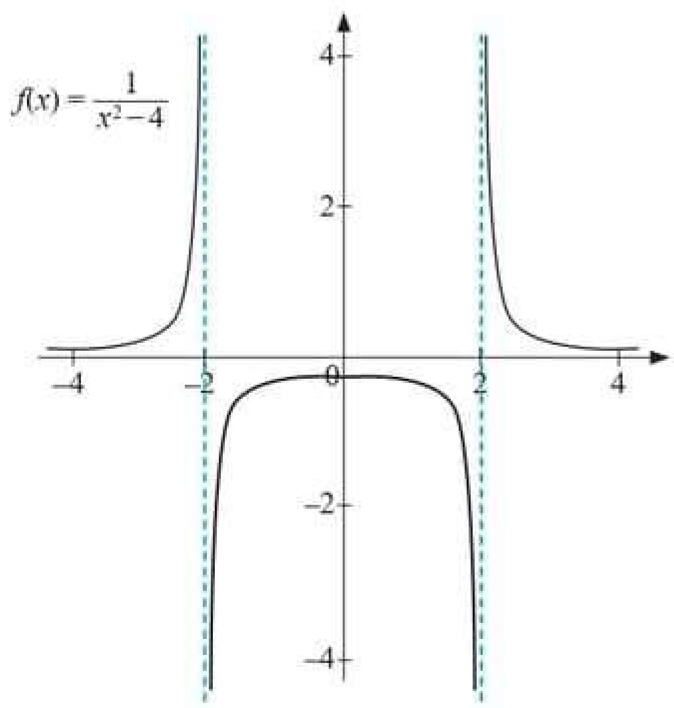
   Resolución

   a) $r(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

   $$r(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

   $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces se dice que la función racional está en su mínima expresión. El dominio de la función racional $r(x)$, como se puede apreciar en la figura de la derecha, es

   $$D_r = \mathcal{R} \setminus \{x | x = 2, x = -2\}.$$



b) $r(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

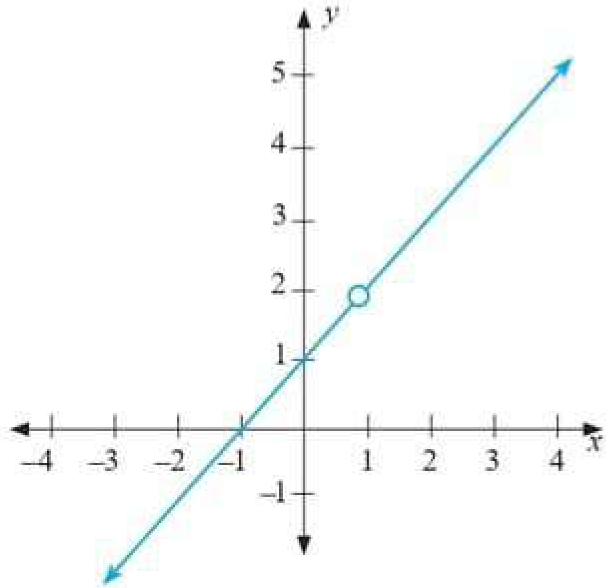
$$r(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

Observa que $P(x)$ y $Q(x)$ tienen un factor común, entonces la función racional no está en su mínima expresión y debes simplificar. Obtienes

$$r(x) = x + 1, \text{ con } x \neq 1.$$

La restricción $x \neq 1$ surge para que sea equivalente a la original y su gráfica se muestra a la derecha.

El dominio de la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ es, $D_r = \mathcal{R}\setminus\{x|x = 1\}$.



Actividad formativa 12.1

1. Determina el dominio de las siguientes funciones racionales.

   a) $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x + 5}$

   b) $r(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

2. Si el numerador y el denominador de una función racional no tienen factores comunes, la función racional está en su ______________________________________.

Determinación de las asíntotas verticales de una función racional

Graficar funciones racionales puede ser más complicado que graficar funciones polinomiales. Hacer una tabla de valores o encontrar los ceros y los interceptos es útil, pero muchas veces no es suficiente. Por eso, es importante comprender qué son las asíntotas y cómo se encuentran.

En particular, las **asíntotas verticales** son esenciales al estudiar funciones racionales. Estas son líneas verticales que indican los valores de x donde la función no está definida, porque el denominador se anula. En dichos valores, la función aumenta o disminuye drásticamente tendiendo hacia mas infinito ($f(x) \to +\infty$) o menos infinito ($f(x) \to -\infty$). Identificar las asíntotas verticales nos permite comprender mejor el comportamiento de la función y facilita su representación gráfica.

Ejemplo formativo 12.2

1. Determina las asíntotas verticales de las siguientes funciones racionales.

   a) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

   b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4x - 21}$

   Resolución

   a) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

   Paso 1. Identifica el denominador.

   Las asíntotas verticales se presentan cuando el denominador de una función se iguala a cero. Las asíntotas verticales ocurren en los valores de x que hacen cero al denominador de la función racional, siempre que el numerador no sea cero en esos mismos valores (el numerador no se anula). En este caso el denominador es $x-1$.

Paso 2. Iguala a cero el denominador y resuelve; $x-1=0$, de donde $x=1$.

Paso 3. Comprueba que el numerador no se anula para ese valor.

El numerador es $x+3$, al evaluarlo en $x=1$ se obtiene: $1+3=4\neq 0$; como el numerador no se anula en $x=1$, hay una asíntota vertical en $x=1$.

Por lo tanto, la asíntota vertical se encuentra en $x=1$.

b) $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+4x-21}$

Paso 1. Identifica el denominador.

Las asíntotas verticales se presentan cuando el denominador se iguala a cero y el numerador no lo anula. El denominador es: $x^2+4x-21$.

Paso 2. Factoriza el denominador $x^2+4x-21=(x+7)(x-3)$.

Paso 3. Iguala a cero cada factor (propiedad del factor cero) y resuelve.

$$x+7=0,\text{ luego } x=-7;\ x-3=0,\text{ luego } x=3$$

Paso 4. Comprueba que el numerador no se anula para esos valores. Como

$$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3).$$

Evalúa para $x=-7$

$$(x+3)(x-3)=(-7+3)(-7-3)=(-4)(-10)=40$$

como el numerador no se anula en $x=-7$, hay una asíntota vertical en $x=-7$.

Evalúa para $x=3$

$$(x+3)(x-3)=(3+3)(3-3)=(6)(0)=0$$

como el numerador se anula en $x=3$, no hay asíntota vertical en $x=3$. Esto significa que en $x=3$ hay un hueco o discontinuidad y no una asíntota vertical.

Por lo tanto, la asíntota vertical se encuentra en $x=-7$ y en $x=3$ hay un hueco o discontinuidad.

Actividad formativa 12.2

1. Determina las asíntotas verticales de las siguientes funciones racionales.

   a) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

   b) $r(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

Determinación de la asíntota horizontal u oblicua de una función racional

Las asíntotas horizontales y oblicuas son características importantes al estudiar las funciones racionales. El objetivo principal al buscar estas asíntotas es comprender el comportamiento de la gráfica de la función cuando x toma valores muy grandes o muy pequeños, es decir, cuando x tiende a mas infinito ($x\to+\infty$) o menos infinito ($x\to-\infty$). En términos sencillos nos preguntamos, ¿hacia dónde se dirige la función en los extremos? Este comportamiento al infinito es clave para entender cómo se comporta la gráfica de la función.

Asíntotas horizontales y oblicuas

Consideremos la función racional $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde n es el grado del polinomio del numerador y m el grado del polinomio del denominador.

Si $\boldsymbol{n < m}$, entonces r es una función racional propia y la gráfica de r tendrá la **asíntota horizontal $\boldsymbol{y = 0}$** (el eje x).

Si $\boldsymbol{n \geq m}$, entonces la función racional r es impropia.

a) Si $\boldsymbol{n = m}$, el cociente que se obtiene será el número $\frac{a_n}{b_m}$, y la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ **es una asíntota horizontal.**

b) Si $\boldsymbol{n = m + 1}$, el cociente que se obtiene es de la forma $ax + b$ (una función polinomial de grado 1) y la recta $\boldsymbol{y = ax + b}$ **es una asíntota oblicua.**

c) Si $\boldsymbol{n \geq m + 2}$, el cociente que se obtiene es una función polinomial de grado 2 o mayor y r **no tiene asíntota horizontal ni asíntota oblicua**.

A continuación, se sugieren los pasos a dar para realizar el análisis de la gráfica de una función racional:

Paso 1. Factoriza el numerador y el denominador de la función $r(x)$. Determina su dominio.

Paso 2. Escribe $r(x)$ en sus términos mínimos.

Paso 3. Localiza las intersecciones de la gráfica con los ejes. Las intersecciones con el eje x son los ceros de la función del numerador de $r(x)$, si los tiene. Para calcular la intersección con el eje y la función $r(x)$ tiene que admitir el valor $x = 0$.

Paso 4. Determina las asíntotas verticales. Estas se encuentran en aquellos valores de x que son ceros del denominador, pero no anulan el numerador. Traza la gráfica de cada asíntota vertical usando una línea punteada.

Paso 5. Determina la asíntota horizontal u oblicua, si existe alguna. A partir del grado del numerador y el denominador considera una posible asíntota horizontal u oblicua. Determina si existen puntos de $r(x)$ que interceptan (o son comunes) con ella. Si no los hay es una asíntota y traza su gráfica usando una línea punteada.

Paso 6. Usa los ceros del numerador y del denominador de $r(x)$ para dividir al eje x en intervalos. Determina, dónde la gráfica de $r(x)$ está por encima o por debajo del eje x escogiendo un número en cada intervalo para evaluar $r(x)$. Traza los puntos que encuentres.

Paso 7. Analiza e indica el comportamiento de la gráfica de $r(x)$ cerca de cada asíntota.

Paso 8. Utiliza los resultados obtenidos en los pasos 1 al 7 para construir la gráfica.

Ejemplo formativo 12.3

1. Analiza la gráfica de la función racional $r(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.

Resolución

Paso 1. $r(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x}$; $D_r = \mathcal{R} \setminus \{x | x = 0\}$

Paso 2. $r(x)$ en su mínima expresión: $r(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x}$

Paso 3. Como x no puede tomar el valor 0, no hay intersección con el eje y. La gráfica tiene dos intersecciones con x, $x = -1$ y $x = 1$, dado que dichos valores anulan al numerador.

Paso 4. El denominador se anula para $x = 0$. Al evaluar el numerador $x^2 - 1$, para $x = 0$ se obtiene $0^2 - 1 = -1 \neq 0$; como el numerador no se anula en ese valor, hay una asíntota vertical en $x = 0$.

Paso 5. La función es impropia dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador; como el numerador es exactamente uno mayor que el grado del denominador, la función tiene una asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r|l} & x + 0 \\ \hline x & x^2 - 1 \\ & -x^2 \\ \hline & 0 - 1 \\ & 0 \\ \hline & -1 \end{array}$$

Para encontrar la asíntota oblicua divide el numerador entre el denominador y obtienes el cociente $x + 0$. Como la asíntota oblicua es el cociente $ax + b$, y en este caso $a = 1$, $b = 0$, la recta $y = ax + b = x + 0$, es decir $y = x$ es una posible asíntota. Traza la gráfica de $y = x$ usando una línea punteada.

Para determinar si la gráfica de $r(x)$ intercepta a la recta $y = x$, iguala las expresiones de las dos funciones y resuelve la ecuación $r(x) = x$

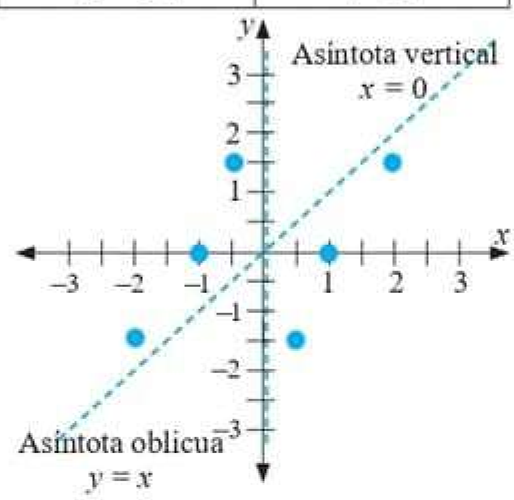
$$\frac{x^2 - 1}{x} = x \;\rightarrow\; x^2 - 1 = (x)(x) \;\rightarrow\; -1 = x^2 - x^2 \;\rightarrow\; -1 \neq 0$$

Puedes concluir que la ecuación $\dfrac{x^2 - 1}{x} = x$ no tiene solución; por tanto, las gráficas de las dos funciones no tienen punto en común y la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Paso 6. Los ceros del numerador son -1 y 1, el del denominador es 0. Con estos valores divides el eje x en cuatro intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

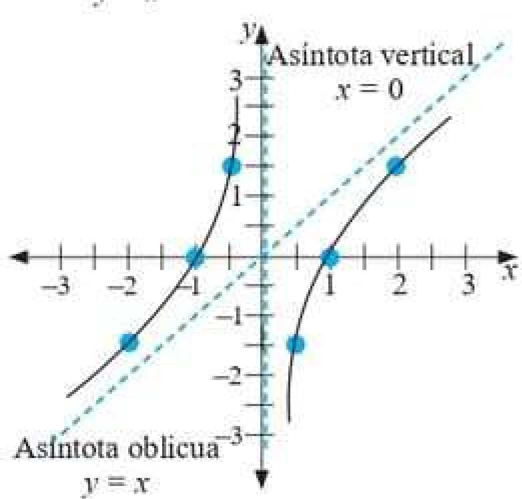
Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Número seleccionado	-2	$-1/2$	$1/2$	2
Valor de r	$r(-2) = -3/2$	$r(-1/2) = 3/2$	$r(1/2) = -3/2$	$r(2) = 3/2$
Localización de la gráfica en el intervalo	Por debajo del eje x	Por encima del eje x	Por debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto de la gráfica	$\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(2, \frac{3}{2}\right)$

Paso 7. La gráfica de $r(x)$ está por debajo del eje x para $x < -1$ y por encima del eje x para $x > 1$; como la gráfica de $r(x)$ no intercepta la asíntota oblicua $y = x$, la gráfica de $r(x)$ se acerca a la recta $y = x$ como se muestra en la figura de la derecha.



En la propia figura se puede apreciar que como la gráfica de $r(x)$ está por encima del eje x para $-1 < x < 0$, la gráfica de $r(x)$ se acercará a la asíntota vertical $x = 0$ en su parte superior, a la izquierda de $x = 0$ y como la gráfica de $r(x)$ está por debajo del eje x para $0 < x < 1$, la gráfica de $r(x)$ se acercará a la asíntota vertical $x = 0$ en su parte inferior, a la derecha de $x = 0$.

Paso 8. Utiliza los resultados obtenidos en los pasos 1 al 7 para construir la gráfica de $r(x)$, la que se muestra en la figura de la derecha.



Consulta la gráfica del ejemplo en GeoGebra en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/zncumhry

Actividad formativa 12.3

1. Analiza las siguientes funciones racionales utilizando los pasos estudiados. Utiliza un graficador para comprobar el proceso.

   a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x-4}$

   b) $h(x) = \dfrac{6x+2}{x-7}$

   c) $g(x) = \dfrac{x^3-7}{x^2-3x+2}$

   d) $r(x) = \dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-2}$

Aplicaciones de las funciones racionales

Ejemplo formativo 12.4

1. Costo mínimo. Se requiere cercar un área rectangular situada junto a un río y no se necesita cerca del lado del río. El área que se requiere cercar es de 900 metros cuadrados. La cerca para el lado paralelo del río cuesta $4.00 por metro lineal y la cerca para los otros dos lados cuesta $8.00 por metro lineal; los postes de las esquinas cuestan $25.00 cada uno. Sea x la longitud de uno de los lados perpendiculares al río.

   a) Escribe una función $C(x)$ que describa el costo del proyecto.

   b) ¿Cuál es el dominio de $C(x)$?

   c) Usa un dispositivo gráfico para obtener la representación gráfica de $C(x)$.

   d) A partir de la gráfica, determina las dimensiones para la cerca más barata.

   Resolución

   a) Para escribir una función $C(x)$ que describa el costo del proyecto, sea x la longitud del lado perpendicular al río y y la longitud del lado paralelo.

   Para relacionar el área con las dimensiones, sabes que el área del rectángulo es de 900 m^2, por lo que $(x)(y) = 900$. Despeja y y obtienes $y = \dfrac{900}{x}$.

   Ahora puedes formar la función del costo total $C(x)$ considerando:

   Dos lados perpendiculares al río: $(2)(8x) = 16x$

   Un lado paralelo al río: $(y)(4) = \left(\dfrac{900}{x}\right) = \dfrac{3600}{x}$

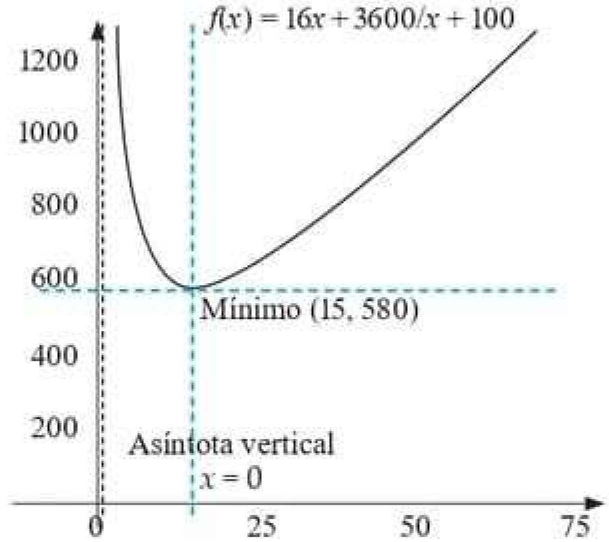
   Cuatro postes (esquinas): $(4)(25) = 100$

   La función que describe el costo del proyecto es $C(x) = 16x + \dfrac{3600}{x} + 100$.

   b) Para obtener el dominio de $C(x)$ observa que en esta función está el término: $\dfrac{3600}{x}$, luego $x \neq 0$.

   Además, como el problema se refiere a la longitud de un lado de una cerca, el valor de x debe ser positivo. El dominio de la función racional $C(x)$, por tanto, es $D_C = (0, +\infty)$.

c) Con la ayuda de un dispositivo gráfico puedes obtener la representación de $C(x)$, como se muestra en la figura de la derecha. Además, puedes consultar la gráfica en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/gek6tmyc



d) Para encontrar las dimensiones de la cerca más barata debes encontrar el mínimo de $C(x)$; ya conoces que una vía es buscar si hay algún punto crítico y por derivación determinar si en ese punto hay un extremo mínimo; también, con ayuda del graficador, puedes obtener el punto de mínimo a partir de la imagen de la función que ya tienes, desplazando los puntos sobre la curva hasta detenerte en el valor mínimo.

Así, en este caso el punto mínimo de la gráfica se encuentra en las coordenadas (15, 580), lo cual significa que el valor x de los lados perpendiculares al río es 15 m para que el costo sea mínimo con un valor de 580 pesos. Consecuentemente el lado paralelo al río tendrá una longitud $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{15} = 60$ m.

La cerca más barata se obtiene tomando para el lado paralelo del río una dimensión de 60 metros y para los lados perpendiculares 15 metros. Con esas dimensiones el costo es de 580 pesos.

Actividad formativa 12.4

1. Se desea instalar paneles solares en un techo rectangular que se encuentra junto a una pared que no requiere ninguna estructura para la instalación de los paneles. El área disponible del techo para los paneles es de 192 metros cuadrados.

   El costo de la estructura de los paneles para el lado paralelo al borde más largo del techo es de \$100 por metro lineal, mientras que el costo de la estructura para los dos lados perpendiculares al borde más largo es de \$150 por metro lineal. Además, cada esquina de la instalación requiere soportes especiales que cuestan \$500 cada uno.

   Sea x la longitud de uno de los lados perpendiculares al borde más largo del techo.

   a) Escribe una función $C(x)$ que describa el costo total de la instalación.

   b) Usa un dispositivo gráfico para obtener la representación gráfica de $C(x)$.

   c) A partir de la gráfica determina las dimensiones de la estructura de los paneles para minimizar el costo total.

EVALUACIÓN FORMATIVA 12.1

1. Lee cuidadosamente cada pregunta y responde de manera clara y precisa.
   a) ¿Qué relación existe entre los números racionales y las funciones racionales?
   b) ¿Cómo se define una función racional en términos de polinomios?
   c) Escribe tres ejemplos de funciones racionales.
2. Analiza la función racional: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$, siguiendo los pasos estudiados. Traza la gráfica y comprueba tus resultados con un graficador.
3. Se requiere que una lata con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 500 centímetros cúbicos. La parte superior y la parte inferior están hechas de un material que cuesta 6 centavos por centímetro cuadrado y la parte lateral está hecha de un material que cuesta 4 centavos por centímetro cuadrado.
   a) Dibuja la figura que ilustre los componentes de una lata en forma de cilindro circular recto, que te apoye a comprender y resolver el problema.
   b) Expresa el costo total C del material como función del radio r del cilindro.
   c) Traza la gráfica de $C(r)$. ¿Para qué valor de r es mínimo el costo de $C(r)$?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ____________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 12. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identifiqué propiedades de las funciones racionales a partir de su representación con graficadores. (M3-C1)			
Analicé funciones racionales determinando sus propiedades, las que verifiqué posteriormente con su representación gráfica. (M2-C2)			
Resolví problemas de diferente índole modelando las situaciones planteadas con funciones racionales. (M4-C3)			
Compartí con mis compañeros la forma que utilicé para obtener las propiedades de las funciones racionales. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 12 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Identificó propiedades de las funciones racionales a partir de su representación con graficadores. (M3-C1)			
Analizó funciones racionales determinando sus propiedades, las que verificó posteriormente con su representación gráfica. (M2-C2)			
Resolvió problemas de diferente índole modelando las situaciones planteadas con funciones racionales. (M4-C3)			
Compartió con sus compañeros la forma que utilizó para obtener las propiedades de las funciones racionales. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Operaciones con funciones

Función suma $f+g$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \text{ para } x \in D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

Función diferencia $f-g$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x), \text{ para } x \in D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

Función producto $f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x), \text{ para } x \in D_{f \cdot g}=D_f \cap D_g$$

Función cociente $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para } x \in D_{fg}=D_f \cap D_g \setminus \{x/g(x)=0\}$$

Progresión de aprendizaje 13

Diseña problemas que requieran la aplicación de múltiples operaciones con funciones, y genera una representación visual que ilustre cómo las operaciones con funciones afectan sus gráficas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 13.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ es igual a:

   a) $0<x<2$ b) $x \neq 2$ c) $-2 \leq x \leq 2$

2. Dada la función $f(x)=x^2+3$ su representación gráfica es:

   a) Una parábola con vértice en el punto (0, 3).

   b) Una recta que pasa por el punto (0, 3).

   c) Una curva cúbica simétrica respecto al punto (0, 3).

3. Si $f(x)=3x^2+2$ y $g(x)=9x-2$, el valor de $f(2)-g(2)$ es igual a:

   a) 12 b) 30 c) -2

Ya has estudiado diferentes tipos de funciones; incluso, has visto cómo se aplican en la solución de diversos problemas, pero en muchas situaciones es necesario combinar funciones para poder obtener resultados.

Por ejemplo, en una fábrica que produce calzados, para conocer las ganancias de la empresa se requiere combinar lo que se ingresa como resultado de las ventas con lo que cuesta producirlos.

Los costos de producción dependen de la cantidad de calzado producida y se pueden modelar mediante dos funciones, la correspondiente al costo fijo C_f que no cambia con la cantidad de producción ya que se refiere, entre otros, a la renta del local de la fábrica y el salario de los empleados, así como la función de costo variable $C_v(x)$ que, dado el costo k por unidad, varía según la cantidad de calzado producido, así $C_v(x) = k \cdot x$.

La función de costo total $C_t(x)$ se obtiene sumando el costo fijo y el costo variable. Así, al combinar estas funciones se obtiene:

$$C_t(x) = C_f + C_v(x) = C_f + k \cdot x.$$

Ahora, también la función de ingresos $I(x)$ depende de la cantidad c de calzado vendido, es decir $I(x) = c \cdot x$. Para calcular las ganancias, se necesita restar al ingreso total el costo total. Por tanto, la función de ganancias $G(x)$ sería:

$$G(x) = I(x) - C_t(x) = I(x) - [C_f + C_v(x)] = c \cdot x - C_f - k \cdot x$$

Como habrás podido observar, para obtener ese resultado se requiere sumar y restar funciones. ¿Será posible siempre realizar también con funciones todas las operaciones que ya conoces?

Operaciones con las funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones con dominios D_f y D_g respectivamente. A partir de ellas se pueden definir nuevas funciones como a continuación se precisa.

Función suma $f + g$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ para } x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

Función diferencia $f - g$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \text{ para } x \in D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

Función producto $f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \text{ para } x \in D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

Función cociente $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para } x \in D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x/g(x) = 0\}$$

Ejemplo formativo 13.1

1. Dadas las funciones $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = x^3 + 1$, calcula:

   a) $(f + g)(x)$

   b) $(f - g)(x)$

   c) $(f \cdot g)(x)$

   d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Resolución

a) Suma: $(f + g)(x) = (2x + 5) + (x^3 + 1) = x^3 + 2x + 6$.

b) Diferencia: $(f - g)(x) = (2x + 5) - (x^3 + 1) = -x^3 + 2x + 4$.

c) Producto: $(f \cdot g)(x) = (2x + 5) \cdot (x^3 + 1) = 2x^4 + 5x^3 + 2x + 5$.

d) Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 5}{x^3 + 1}$, siempre y cuando $x \neq -1$.

Actividad formativa 13.1

1. Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, encuentra: $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$; $(f \cdot g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x$.

b) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$, $g(x) = \frac{1}{x - 3}$.

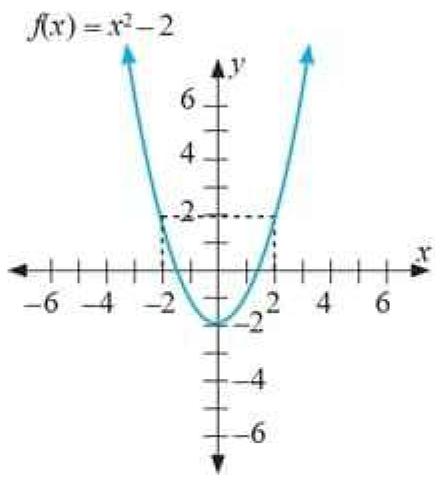
c) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x - 2$.

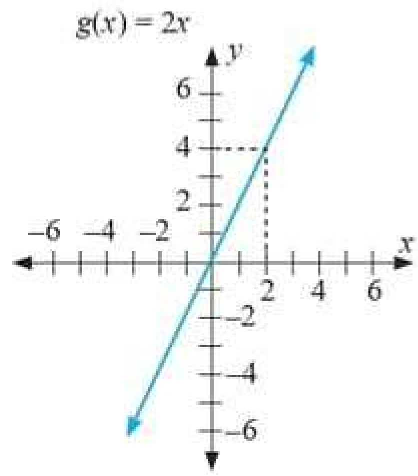
Ejemplo formativo 13.2

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x$, determina la representación gráfica de la suma y resta de ambas funciones utilizando el graficador Desmos.

Resolución

La representación gráfica de ambas funciones se muestra en las figuras siguientes:





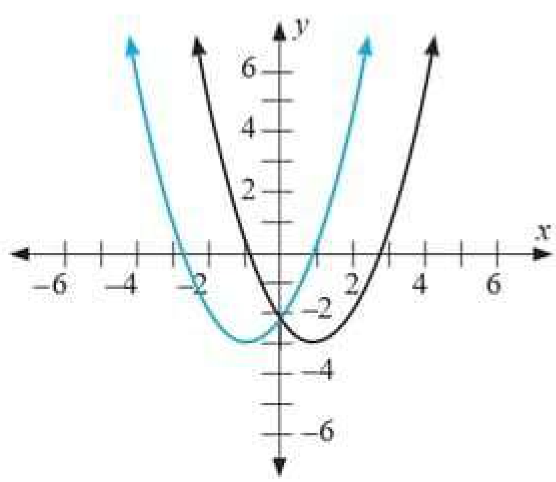
La función suma

$$(f + g)(x) = (x^2 - 2) + (2x)$$
$$= x^2 + 2x - 2$$

y la función diferencia

$$(f - g)(x) = (x^2 - 2) - (2x)$$
$$= x^2 - 2x - 2$$

tienen como representación gráfica las parábolas que se muestran en la figura de la derecha. Identifícalas.



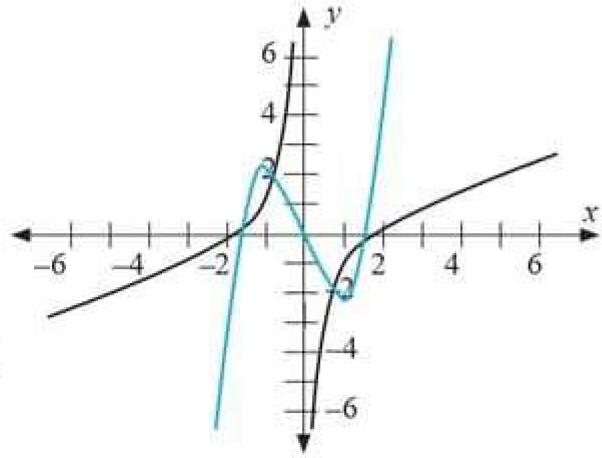
Para el producto

$$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 2) \cdot (2x)$$
$$= 2x^3 - 4x$$

y el cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2}{2x},\ x \neq 0\ ,$$

su representación gráfica se muestra en la figura de la derecha, donde se aprecia que en el caso del cociente hay una discontinuidad con salto infinito en $x = 0$. Identifícalas.



En general, las características geométricas de la representación gráfica del resultado de las operaciones con funciones se corresponden con la función de mayor grado involucrada en la operación, en particular para valores grandes de la variable x, aunque no siempre completamente con la gráfica de esta si hay restricciones referidas al dominio de la función resultante, como es el caso del cociente entre dos funciones.

Actividad formativa 13.2

1. En los siguientes casos encuentra las funciones $f + g$ y $f \cdot g$, determina el dominio de la función resultante y con ayuda de un graficador representa cada una gráficamente.
   a) $f(x) = 5x - 1$ y $g(x) = 3x + 4$.
   b) $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = 3x^2 - 4$.
   c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$.
2. Calcula $f - g$ y $\frac{f}{g}$, determina el dominio de la función resultante y con ayuda de un graficador representa cada una gráficamente.
   a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$ y $g(x) = x + 3$
   b) $f(x) = 5x^2 - 3$ y $g(x) = x - 5$

Composición de funciones

En las operaciones con funciones una operación específica es la composición de funciones, en la que se combinan dos funciones de una manera particular para crear una nueva función.

Por ejemplo, para planificar un viaje en auto es importante calcular cuánto tiempo tomará llegar al destino planificado y el costo del combustible necesario.

La distancia en kilómetros depende de la velocidad v en kilómetros por hora y el tiempo t en horas, relación que se expresa como $d(t) = v \cdot t$, que solo depende del tiempo si se viaja a una velocidad constante.

El costo del combustible C depende de varios factores, de la distancia recorrida d, del consumo de combustible del auto c en litros por kilómetro, así como del precio del combustible p en pesos por litro. Esta relación se puede expresar como: $C(d) = c \cdot p \cdot d$.

Conocidos el consumo de combustible del auto y el costo de este, entonces el costo total de combustible se puede obtener sustituyendo la función de distancia $d(t) = v \cdot t$ en la función de costo $C(d) = c \cdot p \cdot d$ y se obtiene:

$$C(d) = cp \cdot d = cp(vt) = cpv \cdot t$$

Al combinar estas dos funciones el costo total del combustible queda en función del tiempo de viaje, ya que el resto de los factores son conocidos. Para aplicar la composición de funciones, combinamos estas dos relaciones y tenemos una función compuesta $C(t)$ que nos da el costo total del combustible en función del tiempo de viaje.

Así, has podido apreciar, a través de un ejemplo, una operación con funciones denominada composición de funciones y que analíticamente se expresa de la siguiente forma:

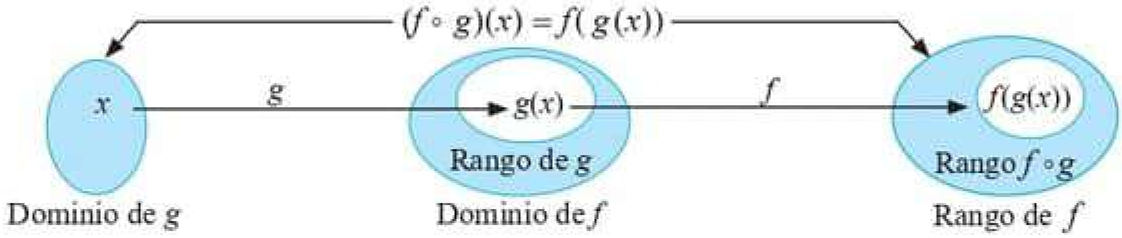
Función compuesta

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $R_g \subset D_f$ entonces la función

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

es la función compuesta de f con g.

La función $f \circ g$ se puede representar gráficamente de la siguiente forma



Por ejemplo, si $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = x^2$, la función $f \circ g$ está dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2) + 5 = 2x^2 + 5.$$

ya que $R_g = \mathcal{R}_+ \subset \mathcal{R} = D_f$

También, como $R_f = \mathcal{R} = D_g$, es posible determinar la función compuesta $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

Como has podido apreciar los dos resultados son diferentes, por lo que se puede afirmar que la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, es decir $f \circ g \neq g \circ f$.

Ejemplo formativo 13.3

1. Dadas las funciones siguientes determina en cada caso la función compuesta que se indica.
   a) $f(x) = x - 5$ y $g(x) = e^x$; $f \circ g$ y $g \circ f$.
   b) $u(x) = 2x + 5$ y $v(x) = 4x - 3$; $u \circ v$ y $v \circ u$.
   c) $r(x) = x^2$ y $s(x) = \sqrt{x - 4}$; $r \circ s$ y $s \circ r$.
2. Si $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2x - 5$, calcula $(f \circ g)(-2)$ y $(g \circ f)(-2)$.

Resolución

1. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = e^x - 5$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 5) = e^{x-5}$
   b) $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(4x - 3) = 2(4x - 3) + 5 = 8x - 1$
   $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x + 5) = 4(2x + 5) - 3 = 8x + 17$
   c) $(r \circ s)(x) = r(s(x)) = r(\sqrt{x - 4}) = (\sqrt{x - 4})^2 = x - 4$
   $(s \circ r)(x) = s(r(x)) = s(x^2) = \sqrt{x^2 - 4}$

2. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 5) = |2x - 5|$, luego

$$(f \circ g)(-2) = |2(-2) - 5| = |-9| = 9$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = 2|x| - 5$, luego

$$(g \circ f)(-2) = 2|-2| -5 = 4 - 5 = -1$$

También es posible hacer la composición de tres funciones, como se muestra a continuación.

Ejemplo formativo 13.4

1. Si $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x - 1$, determina la función compuesta $f \circ g \circ h$ y su valor para $x = 10$.

   Resolución

   $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x - 1)) = f(\sqrt{x - 1}) = \sqrt{x - 1} - 1$

   $(f \circ g \circ h)(10) = \sqrt{10 - 1} - 1 = 2.$

Actividad formativa 13.3

1. Dadas las funciones siguientes determina en cada caso la función compuesta que se indica y sus valores en los casos que corresponda.

   a) $f(x) = x - 3$ y $g(x) = |x + 3|$; $f \circ g$ y $g \circ f$, para $x = -3$.

   b) $r(x) = x^2 + 1$ y $s(x) = \sqrt{x + 9}$; $r \circ s$ y $s \circ r$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^2 + 4$; $f \circ g \circ h$, para $x = 1$.

   d) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x + 1$; $f \circ g \circ h$, $g \circ f \circ h$, $g \circ h \circ f$, para $x = 2$.

La composición de funciones permite simplificar expresiones complejas y facilitar su análisis. En muchos casos, resolver un problema requiere comprender cómo las funciones interactúan entre sí a través de su composición, lo que resalta la necesidad de dominar este concepto. En esa dirección tiene aplicaciones prácticas en diferentes disciplinas, lo que la convierte en una herramienta valiosa para resolver diversos problemas.

Ejemplo formativo 13.5

1. Si se deja caer una piedra en un lago, se crea una onda circular que se mueve hacia afuera. Si la velocidad constante con que se mueve la onda es de 50 cm/s.

   a) Encuentra una función r que modele el radio como función del tiempo.

   b) Encuentra una función A que modele el área del círculo como función del radio.

   c) Determina $A \circ r$. ¿Qué representa esta función?

   Resolución

   a) Como la onda se mueve a velocidad constante de 50 cm/s, y $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{r}{t}$, la distancia recorrida, que es el radio r, en un tiempo t es:

   $$r(t) = v \cdot t = 50t$$

   Esto significa que el radio r es directamente proporcional al tiempo t.

b) El área A de un círculo se calcula con la fórmula $A = \pi r^2$. Entonces, la función que modela el área respecto al radio es $A(r) = \pi r^2$.

c) Para determinar la función compuesta $A \circ r$ sustituimos $r(t)$ en $A(r)$

$$(A \circ r)(t) = A(r(t)) = \mathrm{A}(50t) = \pi(50t)^2 = 2500\pi t^2$$

Esta función representa el área del círculo respecto al tiempo, es decir expresa cuál es el área del círculo formado por la onda que se propaga desde el punto donde se dejó caer la piedra en el lago.

Ejemplo formativo 13.6

1. Un teléfono celular tiene un precio de etiqueta de \$6,000. Por una promoción la tienda ofrece un descuento del 5% y durante otro período, la oferta es de un descuento de \$250 sobre el precio de etiqueta. Pero durante el "Buen Fin" la tienda ofrece combinar ambas ofertas, es decir al descuento del 5% añadir además un descuento adicional de \$250. Representa el precio de etiqueta con x. Si en esa ocasión vas a comprarlo, encuentra las funciones correspondientes y determina cuánto pagarías por el teléfono celular.

Resolución

Supón que la función $f(x)$ modela el precio de compra del teléfono con un 5% de descuento sobre el precio de etiqueta x:

$$f(x) = x - 0.05x = 0.95x$$

Asume ahora que la función $g(x)$ modela el precio de compra del teléfono con un descuento de \$250 sobre el precio de etiqueta x es:

$$g(x) = x - 250$$

Durante el Buen Fin la tienda ofrece el descuento uno a continuación del otro, es decir hay que determinar $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(0.95x) = 0.95x - 250$$

Por tanto, el precio a pagar por el teléfono celular es

$$(g \circ f)(6000) = 0.95(6000) - 250 = 5400$$

Durante el Buen Fin puedes comprar el teléfono por \$5,400.

Actividad formativa 13.4

1. Un globo esférico está siendo inflado y el radio del globo crece constantemente a razón de 1 cm/s.
   a) Encuentra una función f que modele el radio como función del tiempo.
   b) Encuentra una función g que modele el volumen como función del radio.
   c) Determina $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?
2. En una tienda se ofrece un producto que se vende normalmente en 500 pesos con el 30% de descuento por fin de temporada. En una fecha señalada se adiciona durante 3 días un descuento adicional sobre el ya existente de un 20%.
   a) El descuento final, ¿es de un 50%? Argumenta tu respuesta.
   b) ¿Cuál es el precio final que debes pagar por el producto si vas a comprarlo?

EVALUACIÓN FORMATIVA 13.1

1. Dadas las funciones siguientes efectúa la operación indicada y determina su dominio.

   a) Si $u(x) = \frac{x}{x+1}$ y $v(x) = 2x - 3$; halla $u - v$.

   b) Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 5$; halla $f \cdot g$.

   c) Utilizando un graficador, haz la representación gráfica de las funciones obtenidas.

2. Dadas las funciones $r(x) = x^3 + 2$ y $s(x) = \sqrt[3]{x}$, halla:

   a) $(r \circ s)(x)$ y $(s \circ r)(x)$ y el valor de ambas para $x = -1$.

   b) Si adicionalmente $p(x) = x^2$, $(p \circ r \circ s)(-1)$.

3. Un distribuidor de aparatos electrodomésticos anuncia un 10% de descuento en todas sus licuadoras. Además, el fabricante ofrece un descuento de $100 sobre la compra de una licuadora. Representa con x el precio de la etiqueta de la licuadora.

   a) Supón que sólo aplica el 10% de descuento. Encuentra una función f que modele el precio de compra de la licuadora como función del precio x de etiqueta.

   b) Asume ahora que sólo aplica el descuento de $100. Encuentra una función g que modele el precio de compra de la licuadora como función del precio x de etiqueta.

   c) Encuentra $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor trato?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 13. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Razoné la importancia de determinar el dominio de la función resultante al realizar operaciones con funciones. (M2-C1)			
Utilicé las operaciones con funciones para resolver diferentes tipos de problemas. (M3-C3)			
Empleé con rigor el significado de la composición de funciones al interpretar situaciones en que estas se presentan. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 13 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

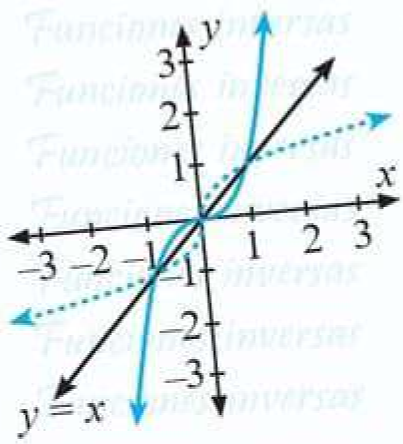
Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Razonó la importancia de determinar el dominio de la función resultante al realizar operaciones con funciones. (M2-C1)			
Utilizó las operaciones con funciones para resolver diferentes tipos de problemas. (M3-C3)			
Empleó con rigor el significado de la composición de funciones al interpretar situaciones en que estas se presentan. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones inversas

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \in B \text{ y } f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \in A.$$



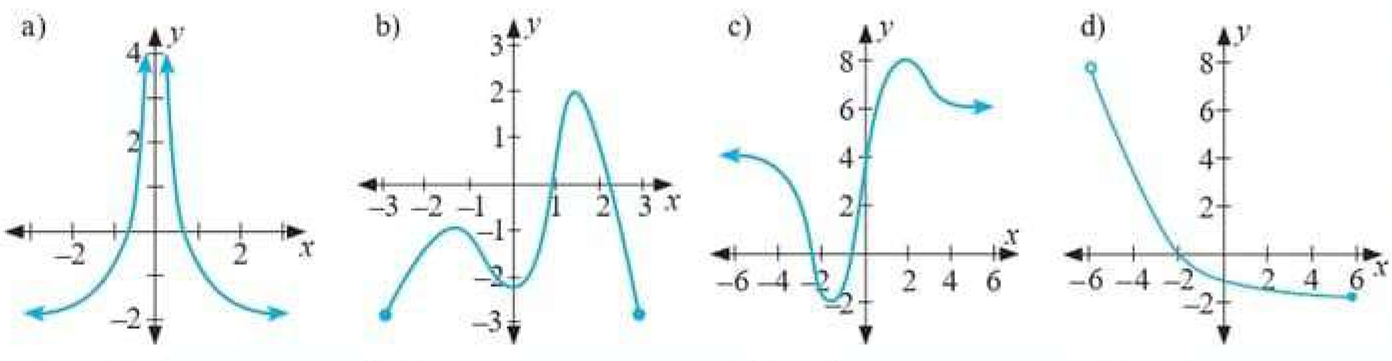
Progresión de aprendizaje 14

Valora las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función inversa, y formula un método para construir y graficar la función inversa de una función dada, incluyendo casos de funciones no inyectivas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 14.1

1. Determina el dominio y el rango de las funciones representadas por las gráficas abajo.



a) Dom f: __________ b) Dom f: __________ c) Dom f: __________ c) Dom f: __________

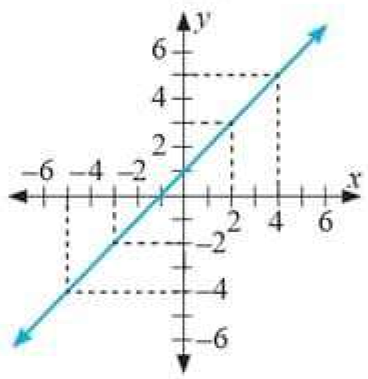
a) Rango f: __________ b) Rango f: __________ c) Rango f: __________ d) Rango f: __________

Imagina que estás planeando un viaje a Europa y necesitas convertir pesos mexicanos (MXN) a euros (EUR). La tasa de cambio actual es de 1 EUR = 22 MXN. La función que convierte pesos a euros se puede expresar como: $f(x) = 20x$, donde x es la cantidad en pesos mexicanos y $f(x)$ es la cantidad en euros. Después del viaje, quieres convertir los euros restantes de vuelta a pesos mexicanos. Aquí entra en juego la función inversa, que estudiarás en esta progresión de aprendizaje.

Función inversa

En esta Unidad de Aprendizaje Curricular has estudiado las funciones lineales, cuadráticas, potencia, polinomiales y racionales. Como ya sabes, una función numérica define su dominio y, en consecuencia, su rango, además, de que los elementos del dominio están relacionados con los elementos del rango mediante la regla de correspondencia $y = f(x)$. Dicha regla de correspondencia entre el dominio y el rango puede presentar situaciones como las siguientes:

Gráfica de $f(x) = x + 1$



$f(x) = x + 1$

$f(-5) = -4$

$f(-3) = -2$

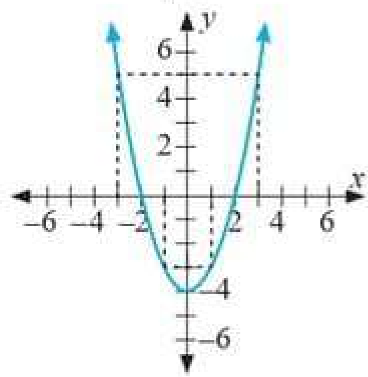
$f(-1) = 0$

$f(0) = 1$

$f(2) = 3$

$f(4) = 5$

Gráfica de $f(x) = x^2 - 4$



$f(x) = x^2 - 4$

$f(-1) = -3$

$f(1) = -3$

$f(-3) = 5$

$f(3) = 5$

Observa que en la representación gráfica de la función lineal $f(x) = x + 1$, no hay dos elementos del dominio que tengan una misma imagen, y en la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4$, sí hay pares de elementos del dominio que tienen una misma imagen. A las funciones en las que no hay dos o más elementos del dominio que tengan una misma imagen, se les llama funciones uno a uno o inyectivas.

Definición de función uno a uno

Una función numérica es uno a uno si cada número real del rango de f está asociado con exactamente un número real en su dominio.

De manera más precisa, una función $f\colon D_f \rightarrow R_f$ es uno a uno cuando para cada $x_1, x_2 \in D_f$ se cumple alguna de las dos afirmaciones equivalentes:

- Si $f(x_1) = f(x_2)$, necesariamente se cumple $x_1 = x_2$.
- Si $x_1 \neq x_2$ necesariamente se cumple $f(x_1) \neq f(x_2)$.

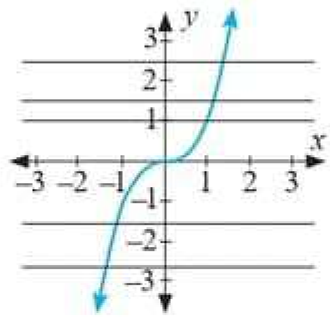
O sea, una función es uno a uno si cada $y = f(x)$ es la imagen de exactamente un único elemento del dominio. En otras palabras, de todos los pares (x, y) pertenecientes a la función, las ordenadas y no se repiten.

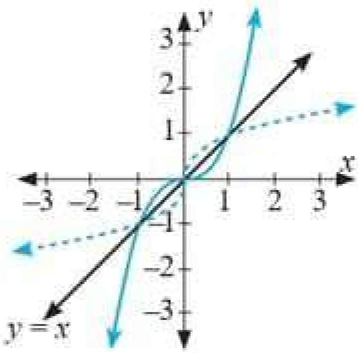
QR 14.1. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva | Tipos de funciones. Video del profesor Alex. *Fuente:* Parzybite 2025.

El significado gráfico de la función uno a uno es que rectas paralelas al eje x cortan a la gráfica en un único punto.

Para profundizar más sobre el tema, e indagar sobre las funciones sobreyectivas y biyectivas, puedes observar el video que aparece en código QR 14.1.

La función $f(x) = x^3$ es uno a uno, puedes verificarlo usando el graficador Desmos. También puedes trazar rectas horizontales sobre su representación gráfica, y si ninguna de estas la interseca más de una vez, se dice que la función es uno a uno, a esto se le conoce como la prueba de la recta horizontal.





Por otra parte, vimos la reflexión de una función sobre el eje de las abscisas y sobre el eje de las ordenadas, ahora, imagínate la reflexión de la función $f(x) = x^3$ sobre la recta $y = x$.

Observa que cada punto (x, y) de $f(x) = x^3$, se transforma en el punto (y, x) de la representación gráfica de su reflexión. A la reflexión de una función uno a uno sobre la recta $y = x$ se le llama **inversa de $f(x)$**, y se denota como $f^{-1}(x)$. El -1 no es un exponente, pues la notación representa la inversa de una función y no a $\frac{1}{f(x)}$.

Definición de función inversa

Sea f función uno a uno con dominio A y rango B. La inversa de f es la función f^{-1}, cuyo dominio es B y rango A, para los cuales

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \in B \text{ y } f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \in A.$$

Ejemplo formativo 14.1

1. Estás planeando un viaje a Europa y necesitas convertir pesos mexicanos (MXN) a euros (EUR). La tasa de cambio actual es de 1 EUR = 22 MXN. Si dispones de 22,000 MXN, ¿cuántos euros podrás llevar para el viaje? Imagina que ya regresaste del viaje y te quedaron 50 euros, ¿cuántos pesos mexicanos podrás obtener al convertirlos?

Resolución

Paso 1. Conversión de MXN a EUR para el viaje:

- Tasa de cambio: 1 EUR = 22 MXN
- Cantidad de pesos mexicanos (MXN): 22,000 MXN

Para convertir los pesos mexicanos a euros, utilizamos la función que convierte pesos mexicanos a euros, que se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{x}{22}$$

donde x es la cantidad en pesos mexicanos, $f(x)$ es la cantidad en euros y 22 es la tasa de cambio. Utiliza la función de conversión para encontrar cuántos euros obtendrás con 22,000 MXN:

$$f(x) = \frac{22000}{22} = 1000$$

Por lo tanto, dispondrás de 1,000 euros para tu viaje.

Paso 2. Conversión de EUR a MXN al regresar del viaje:

- Tasa de cambio: 1 EUR = 22 MXN
- Cantidad de euros (EUR): 50 EUR

Para convertir los euros restantes a pesos mexicanos, si $y = f(x)$ es la cantidad de euros utiliza la siguiente fórmula:

$$x = 22y$$

$$x = 22 \cdot 50 = 1100$$

Por lo tanto, al regresar del viaje con 50 euros, podrás obtener 1,100 pesos mexicanos.

En conclusión:

- Podrás llevar 1,000 euros para tu viaje.
- Al regresar del viaje, podrás obtener 1,100 pesos mexicanos al convertir los 50 euros que te quedaron.

Veamos ahora, ¿cuál es el procedimiento para determinar la ecuación de la función inversa de $f(x) = x^3$?

Haz $y = x^3$, luego despeja x para obtener $x = \sqrt[3]{y}$, intercambia x e y para obtener $y = \sqrt[3]{x}$; por último, se redefine como $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Resumiendo, para determinar la inversa de una función uno a uno, ejecuta los siguientes pasos:

Paso 1. Escribe $y = f(x)$.

Paso 2. Despeja x de esta ecuación en términos de y para obtener $x = f(y)$.

Paso 3. Intercambia x e y. La ecuación resultante es la función inversa, en símbolos

$$y = f^{-1}(x)$$

Comprueba mediante la definición de función inversa, que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ es la inversa de $f(x) = x^3$. Observa que para esta función el dominio y rango tanto de f como de f^{-1} es $\mathcal{R}$.

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \text{ y } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Por lo tanto, f^{-1} es la función inversa de f.

Las funciones inversas tienen las siguientes propiedades:

1. Dominio de f^{-1} es igual al rango de f.
2. Rango de f^{-1} es igual al dominio de f.
3. La inversa de f^{-1} es f, esto es $(f^{-1})^{-1} = f$.

Observa que la función inversa de una función f, denotada como f^{-1} es una función que "deshace" la acción de f.

Ejemplo formativo 14.2

1. Hamburguesas "El Buen Sabor" vende la hamburguesa especial en \$80 más \$5 por cada ingrediente extra. Si un cliente ordena una hamburguesa especial con x ingredientes extra, el costo está dado por la función $f(x) = 80 + 5x$. Determina f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

   Resolución

   Ten en cuenta la función original: $f(x) = 80 + 5x$.

   Para encontrar la inversa, $f^{-1}(y)$, escribe $y = f(x)$, se tiene $y = 80 + 5x$.

   Intercambia x y y.

$$x = 80 + 5y$$

Resuelve la ecuación para y.

$$x - 80 = 5y \rightarrow y = \frac{x - 80}{5}$$

Por lo tanto, la función inversa es:

$$y = \frac{x - 80}{5}$$

Interpretación de f^{-1}. La función f^{-1} representa la cantidad de ingredientes extra que un cliente debe agregar a una hamburguesa especial para alcanzar un costo total de x pesos. En otras palabras, si conoces el costo total de una hamburguesa especial con ingredientes extra, puedes usar f^{-1} para encontrar cuántos ingredientes extras fueron agregados.

Por ejemplo, si un cliente pagó $95 por una hamburguesa especial, para saber cuántos ingredientes extra agregó, usamos f^{-1}.

$$f^{-1}(95) = \frac{95 - 80}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Entonces, el cliente agregó tres ingredientes extra a su hamburguesa especial.

Las funciones inversas son herramientas matemáticas que permiten resolver una variedad de problemas en la vida cotidiana. Las funciones inversas permiten "deshacer" operaciones.

Por ejemplo, si conoces el precio final de un producto después de aplicar un descuento, puedes usar la función inversa para determinar el precio original antes del descuento. Si necesitas convertir diferentes unidades de medida, las funciones inversas pueden ser de gran ayuda. Por ejemplo, si sabes la temperatura en grados Fahrenheit y quieres convertirla a grados Celsius, puedes utilizar la función inversa de la fórmula de conversión de Celsius a Fahrenheit.

En economía y finanzas, las funciones inversas se utilizan para calcular tasas de interés, amortizaciones de préstamos y análisis de inversiones. Por ejemplo, si conoces el valor futuro de una inversión, puedes usar la función inversa para determinar cuánto dinero necesitas invertir hoy.

En ingeniería y física, las funciones inversas se utilizan para convertir medidas entre diferentes sistemas, calibrar instrumentos y resolver problemas de dinámica. Por ejemplo, si conoces la velocidad de un objeto y necesitas encontrar el tiempo que tardó en recorrer una cierta distancia, puedes usar la función inversa de la fórmula de velocidad.

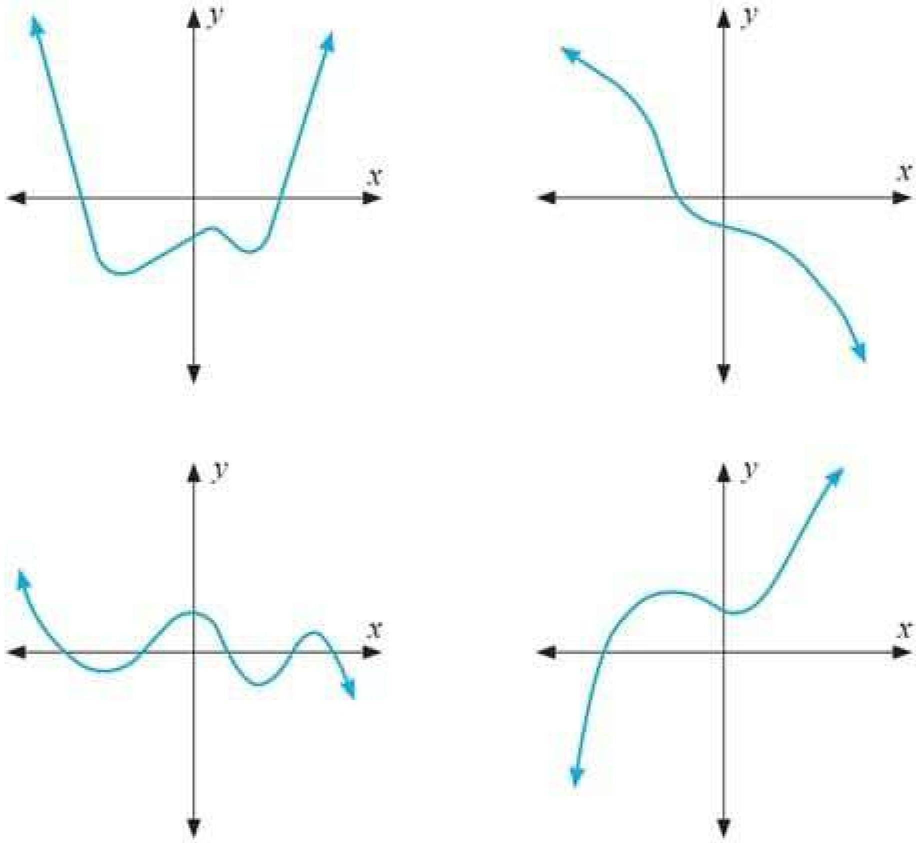
Actividad formativa 14.1

1. Una función es uno a uno si: ____________________
2. ¿Las funciones polinomiales de grado par son uno a uno? ____________________
3. Una función tiene inversa si: ____________________
4. Determina si las siguientes funciones tienen inversa, y si la tienen, halla su ecuación, dominio y rango.
   a) $f(x) = 5x + 6$
   b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
   c) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$
5. La función cuadrática $f(x) = x^2 + 5$ no es uno a uno en su dominio natural, restríngelo de tal forma que se pueda determinar la inversa.
6. En la función lineal $f(x) = mx + b$, ¿para qué valores de m la función tiene inversa?

EVALUACIÓN FORMATIVA 14.1

1. ¿En qué consiste la prueba de la recta horizontal? ______________________________

2. ¿Cuáles de las siguientes representaciones gráficas tienen inversa?



3. Determina si las siguientes funciones tienen inversa, y si la tienen, halla su ecuación, dominio y rango.

   a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

   b) $f(x) = 16 - x^2$

4. La función $f(x) = x^3$ tiene inversa. La función $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$, ¿tiene inversa? Justifica tu respuesta.

5. Pizzas Leo vende la pizza grande en \$199 más \$10 por cada aderezo. Si un cliente ordena una pizza grande con x aderezos, el costo está dado por la función $f(x) = 199 + 10x$. Determina f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 14. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Razoné las características que deben tener una función para que tenga inversa (M2-C1)			
Identifiqué gráficamente el significado de las condiciones para la existencia de una función inversa (M1-C2)			
Expresé con precisión las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función inversa y el método para obtenerla (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 14 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Razonó las características que deben tener una función para que tenga inversa (M2-C1)			
Identificó gráficamente el significado de las condiciones para la existencia de una función inversa (M1-C2)			
Expresó con precisión las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función inversa y el método para obtenerla (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Bibliografía consultada

Juárez, J. A., Ylé, A. y Flórez, A. (2020). Matemáticas IV. Funciones y geometría analítica. Servicios Once Ríos Editores.

SEP (2023a). Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Diario Oficial de la Federación.

SEP (2023b). Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático. SEMS.

SEP (2023c). Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático. SEMS.

Vizcarra, F., Forneiro, R., Flórez, A y Sosa, C. E. (2022). Matemáticas II. Álgebra para bachillerato. Servicios Once Ríos Editores.

Vizcarra, F., Forneiro, R., Flórez, A y Sosa, C. E. (2021). Matemáticas I. Aritmética y álgebra para bachillerato. Servicios Once Ríos Editores.

Ylé, A., Juárez, J. A. y Vizcarra, F. (2018). Cálculo diferencial por competencias para bachillerato. Servicios Once Ríos Editores

Referencia a las fuentes de consulta de códigos QR

QR 1.1. ¿Qué es la potencia de un número? Video de PruébaT. https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/33348/a841a6cc0c29126c1978b57a97aeb806/343478
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 1.2. Propiedades de las potencias. Video IngE Darwin. https://youtu.be/OB-JQc5PIhE
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 1.3. Potencia con exponente fraccionario. Video profe Alex. https://youtu.be/IqW4-JUrd3k
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 1.4. Leyes de los radicales. Video MateFacil. https://youtu.be/GgVW0-Yre9Q
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 1.5. Simplificar la raíz de expresiones con números. Video PruébaT. https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/9610/365b3984b73146338eb90de460bbdcd1/158773
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.1. Productos notables. Video de PruébaT. https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/33349/9ef7e63a3d25d404d211e397689ad0ee/345488
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.2. Binomios conjugados. Video de KhanAcademy. https://youtu.be/Lb4v-gZ_KZ4
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.3. Binomio al cuadrado. Video de KhanAcademy. https://youtu.be/D6wANZkEEOI
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.4. Binomios con un término común. Video de PruébaT. https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/33349/2532dc379bc9d2646ccda3fed81914c0/345498
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.5. Binomio al cubo. Video de Pruéba-|1T. https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/33349/dc80df4e7ad80e9bb09a9aaeb51aca20/345496
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.6. Triángulo de pascal. Video del profe Alex. https://youtu.be/9ri5dwV2K6E
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.1. Producto de binomios con término común. Video de Hospital de Matemáticas. https://youtu.be/pol7gkdiGB0
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.2. Video del profe Daniel Carrión. https://www.youtube.com/watch?v=BygK1lQxQnA
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.3. Video del profe Daniel Carrión. https://www.youtube.com/watch?v=esbREDCXTpM
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 3.4. Video del profe Alex. https://www.youtube.com/watch?v=X9DT2c1u_GU
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 3.5. Video del profe Daniel Carrión. https://www.youtube.com/watch?v=TKo7NtIilWM
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 3.6. Video del profe Daniel Carrión. https://www.youtube.com/watch?v=4bCKKe3mR08
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 3.7. Video del profe Alex. https://www.youtube.com/watch?v=xZHGl-RUqHs
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 3.8. Video del profe Alex. https://www.youtube.com/watch?v=y_mkvBoYz-Y
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 4.1. Simplificar fracciones algebraicas. Video de profejulio. https://youtu.be/0iF4MQ9lds8
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 4.2. Multiplicación de fracciones algebraicas. Video del profe Alex. https://youtu.be/GWgMZXrL-qxU
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 4.3. División de fracciones algebraicas. Video del profe Alex. https://youtu.be/xYr5nIRmYZQ
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 4.4. Suma y resta de fracciones algebraicas. Video del profe Alex. https://youtu.be/HRcv5F96pwA
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 4.5. Fracciones algebraicas. Video de Math mobile. https://youtu.be/0iF4MQ9lds8
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 5.1. Propiedades de las desigualdades. Video de Coronado GED Academy. https://youtu.be/NAKaOkg0LDM
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 7.1. Concepto de función. Video del profe Alex. https://www.youtube.com/watch?v=Ll7xfe3HoZE
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 7.2. Dominio y rango de una función. Video del profe Alex. https://www.youtube.com/watch?-v=H40lcwlgPMk
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 9.1. Contracción de la función cuadrática básica. https://www.geogebra.org/m/kcf4j2cs
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 9.2. Dilatación de la función cuadrática básica. https://www.geogebra.org/m/xcjpgtxs
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 9.3. Dilatación de la función cuadrática básica. https://www.geogebra.org/calculator/ph8qcmwb
Fuente: Parzibyte, 2025.
QR 9.4. Reflexión de la función cuadrática básica. https://www.geogebra.org/calculator/zds5mr7d
Fuente: Parzibyte 2025.
QR 9.5. Traslación horizontal de la función cuadrática. https://www.geogebra.org/calculator/amw4pkw3
Fuente: Parzibyte 2025.
QR 10.1. Video sobre $f(x) = x^n$, n entero positivo. https://www.youtube.com/watch?v=W85Z17SHr98
Fuente: Parzibyte 2025.
QR 10.2. Video sobre $f(x) = x^n$, n par negativo. https://www.youtube.com/watch?v=K0dPawPnCFI
Fuente: Parzibyte 2025.
QR 10.3. Video sobre $f(x) = x^n$, n impar negativo. https://www.youtube.com/watch?v=iMYsLjdQDo4
Fuente: Parzibyte 2025.
QR 14.1. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva | Tipos de funciones. Video del profesor Alex. https://www.youtube.com/watch?v=xhBWUbY1VrM
Fuente: Parzibyte, 2025.

Temas selectos de matemáticas I

Se terminó de imprimir en noviembre de 2025 en los talleres gráficos
de Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,
Luis González Obregón S/N, Nuevo Bachigualato, C.P. 80135,
Tel. 667 712 2950, Culiacán, Sin., México

Esta obra consta de 18,000 ejemplares.